

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Миколаївський національний університет

імені В. О. Сухомлинського

**В. Д. БОРИСЕНКО, С. А. УСТЕНКО, І. В. УСТЕНКО**

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ  
ЛІНІЙ І ПОВЕРХОНЬ У НАТУРАЛЬНІЙ  
ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ**

Затверджено рішенням вченої ради Миколаївського  
національного університету імені В. О. Сухомлинського  
як наукова монографія

УДК 514.18  
ББК 22.151.5  
Б82

*Авторський колектив:*

В. Д. Борисенко, д-р техн. наук, професор кафедри комп'ютерної інженерії Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського;

С. А. Устенко, д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерної інженерії Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського;

І. В. Устенко, канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова.

*Рецензенти:*

І. І. Коваленко, д-р техн. наук, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили;

О. В. Шоман, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".

Затверджено рішенням вченої ради Миколаївського національного університету імені В. О. Сухомлинського як наукова монографія (протокол № 3 від 20 червня 2018 р.).

Борисенко В. Д.

Б 82 Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації: монографія / В. Д. Борисенко, С. А. Устенко, І. В. Устенко. – Миколаїв: МНУ, 2018. – 216 с.

В монографії розглянуті питання моделювання плоских і просторових кривих ліній та поверхонь в натуральній параметризації із застосуванням різноманітних законів розподілу кривини та скруту (для просторових ліній) і розподілу кривини вздовж головних напрямів поверхні. Наведені приклади застосування запропонованих методів геометричного моделювання в транспортній та енергетичній галузях промисловості. Для фахівців, аспірантів і студентів, які цікавляться питаннями геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь у своїх предметних галузях.

УДК 514.18  
ББК 22.151.5

ISBN 978-617-7421-22-0

© Борисенко В. Д., Устенко С. А.,  
І. В. Устенко  
2018

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	6
1 ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ ЛІНІЙ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ .....	9
1.1 Сфери застосування кривих ліній .....	9
1.2 Способи задання плоских кривих ліній .....	11
1.3 Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації .....	12
1.4 Приклади моделювання кривих із синусоїдальним законом розподілу кривини .....	17
1.5 Моделювання кривих з лінійним законом розподілу кривини .....	25
1.6 Моделювання складених кривих з лінійними законами розпо- ділу кривини їх окремих ділянок .....	32
1.7 Моделювання плоских кривих з квадратичною залежністю кривини від довжини дуги .....	36
1.8 Моделювання складених кривих з квадратичною залежністю кривини від довжини дуги .....	40
1.9 Моделювання кривих з кубічною залежністю кривини від до- вжини дуги .....	45
2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ ЛІНІЙ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ .....	50
2.1 Способи задання просторових кривих ліній .....	50
2.2 Моделювання просторових кривих з лінійним розподілом кривини та скруту .....	56
2.3 Моделювання просторових кривих з лінійним розподілом кривини та скруту із застосуванням рівнянь Ейлера .....	58
2.4 Моделювання просторових кривих числовим розв'язанням рівнянь Френе .....	61
2.5 Моделювання спіральних кривих .....	68
2.6 Побудова просторових кривих, які проходять через задані точки простору .....	72

<b>3</b>	<b>МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ З ВИЗНАЧЕНИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ КРИВИНИ ВЗДОВЖ ГОЛОВНИХ ЇХ НАПРЯМІВ .....</b>	<b>78</b>
3.1	Вимоги, які подаються до поверхонь, методи утворення поверхонь .....	78
3.2	Моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів .....	82
3.3	Моделювання ділянок поверхонь із заданими коефіцієнтами законів розподілу кривини .....	86
3.4	Алгоритм побудови поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів.....	89
3.5	Побудова складеної поверхні ділянками з лінійними законами розподілу кривини.....	96
3.6	Моделювання поверхонь із заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів в їх кінцевих точках .....	100
3.7	Моделювання поверхонь з лінійним і нелінійним законами розподілу кривини.....	106
3.8	Моделювання поверхонь з нелінійним і лінійним законами розподілу їх кривини і заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів в їх кінцевих точках .....	114
3.9	Моделювання поверхонь із заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів у всіх кінцевих точках.....	120
<b>4</b>	<b>ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ В ТУРБО- ТА СУДНОБУДУВАННІ .....</b>	<b>127</b>
4.1	Моделювання профілів лопаток осьових турбін.....	127
4.2	Удосконалений метод моделювання профілів лопаток осьових турбін.....	136
4.3	Моделювання меридіонального профілю проточної частини багатоступінчастої осьової турбіни.....	140
4.4	Моделювання меридіонального обводу робочого колеса радіально-осьового турбодетандера.....	144
4.5	Профільювання лопатки радіально-осьової турбіни на розгортці циліндричної поверхні зовнішнього радіуса робочого колеса .....	148
4.6	Моделювання корабельних кривих з квадратичним законом розподілу кривини .....	153

4.7 Аналітичне подання батоксів теоретичного креслення корпусу судна .....	159
<b>5 МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ КРИВИХ ЗАЛІЗНИЧНИХ КОЛІЙ</b>	<b>164</b>
5.1 Геометричні особливості залізничної колії .....	164
5.2 Моделювання перехідних кривих між прямолінійними рейками, розташованими під деяким кутом.....	169
5.3 Моделювання біклотоїдних перехідних кривих залізничного шляху .....	174
5.4 Моделювання S-подібних перехідних кривих залізничних колій .....	181
5.5 Моделювання перехідної кривої на обмеженій ділянці місцевості .....	187
5.6 Побудова перехідної кривої для існуючих ділянок залізничного шляху.....	191
5.7 Моделювання перехідної кривої між прямолінійною та круговою ділянками шляху, розташованими у двох паралельних площинах .....	196
5.8 Геометричне моделювання просторової перехідної кривої між прямолінійною та круговою ділянками шляху з різними кутами нахилу до дотичних площин .....	202
5.9 Побудова перехідної кривої для двох прямих ділянок шляху, розташованих у паралельних площинах.....	205
5.10 Моделювання просторової перехідної кривої, що з'єднує дві кругові ділянки .....	209
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>212</b>

## ВСТУП

Останніми роками в проектуванні складних наукомістких виробів різних галузей промисловості відбулися суттєві якісні зміни. Спостерігається повсюдний перехід від традиційних засобів обробки графічної інформації до безпаперових технологій, які базуються на цифровому описі об'єктів, що проектуються і надалі виготовляються. Комп'ютерні технології дозволяють створювати числові моделі різних об'єктів. За їх допомогою проєктант може переглядати на екрані комп'ютера ще фізично не існуючий об'єкт, отримувати бажані його геометричні характеристики, вносити, якщо необхідно, певні зміни, готувати виробництво і, нарешті, виготовляти той чи інший виріб на сучасних обробних центрах.

Геометрична інформація щодо виробів має визначати їх у повному обсязі, відповідати вимогам, які впливають з функціональних, конструктивних, міцнісних, ергономічних, естетичних, експлуатаційних, технологічних та інших умов.

Найважливішою складовою інформації, що застосовується при виготовленні виробів технологічно складних, наукомістких галузей промисловості, є геометрична модель об'єкта, яка містить опис його форми, а також опис зв'язків елементів моделі. Ці моделі необхідні при прийнятті певних рішень, щодо проєктованого об'єкта, для проведення досліджень, наприклад, розрахунків на міцність, газодинамічних розрахунків і т. д., для передачі даних до комп'ютерних засобів сучасного технологічного обладнання.

Інтенсивний розвиток комп'ютерних технологій та тривимірної графіки вимагають удосконалення існуючих і розвитку нових методів геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь, адаптації їх до вирішення різноманітних практичних задач.

При створенні виробів технологічно складних галузей промисловості широко застосовуються різноманітні методи геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь, якими описуються обводи компонентів виробів,

що можуть, наприклад, рухатися в якомусь середовищі. Ці методи постійно вдосконалюються фахівцями з прикладної геометрії. На розвиток методів моделювання кривих ліній і поверхонь певним чином впливають технологічні, естетичні та інші чинники.

Серед розмаїття методів моделювання плоских і просторових кривих та поверхонь особливе місце займають ті, які базуються на застосуванні натуральної параметризації, де параметром виступає довжина власної дуги. Криві та поверхні, подані у натуральній параметризації, мають особливе значення для розв'язання багатьох практичних задач науки і техніки.

Наукові дослідження в галузях прикладної та обчислювальної геометрії, комп'ютерної графіки останнім часом досягли значних успіхів у сфері аналітичного подання обводів і поверхонь різних технічних деталей та їх візуалізації на комп'ютері. Одним із основних напрямів розвитку прикладної геометрії є розробка нових методів геометричного моделювання поверхонь, плоских і двовимірних обводів, які мають задовольняти певним позиційним, метричним і диференціальним умовам. Незважаючи на те, що в цій гільці геометрії отримані значні результати в сфері моделювання обводів і поверхонь, все ж таки і на цей час існує достатньо питань, які обумовлюються розв'язанням задач, що постають перед фахівцями з прикладної геометрії та комп'ютерної графіки – важливим споживачем досягнень прикладної геометрії – сучасні наука і техніка.

Розвиток науки і техніки сприяє впровадженню у виробництво новітнього високопродуктивного технологічного устаткування, оснащеного обчислювальними засобами, які забезпечують можливість реалізації складних просторових переміщень ріжучого інструмента. Подібне устаткування дозволяє виготовляти вироби дуже складної просторової форми, але, в свою чергу, вимагає розробки досконалого математичного та програмного забезпечення. Високотехнологічні обробні центри мають свої специфічні апаратні та програмні засоби, їх керуючі програми є числовими моделями відповідних технологічних процесів, тому вони ставлять надзвичайно високі вимоги до якості геометричного моделювання плоских і просторових обводів деталей, які обробляються.

Отже, розробка нових методів геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь, є актуальною, вона має важливе теоретичне та практичне значення. Особливу роль при цьому відіграють криві та поверхні, які розглядаються в натуральній параметризації.

Запропоновані в цій монографії методи моделювання кривих ліній і поверхонь реалізовані в програмному середовищі Фортран (FORTRAN – FORMula TRANslation), який і до цього часу є широко поширеною мовою програмування, особливо серед користувачів, які займаються питаннями числового моделювання.

Так склалося історично, що Фортран виявився основною мовою програмування при розв'язанні наукових, інженерних і багатьох інших задач. Виникала та проходила мода на інші мови програмування. Наприклад, одночасно з Фортраном були розроблені такі мови, як Алгол, набагато більш виразні синтаксично і такі, які краще забезпечували структурованість програм. Але Фортран витіснив ці мови. Навіть мови-"вискочки" 70- і 80-х років типу Паскаля і Сі досі не знайшли широкого застосування при вирішенні числових задач. Більшість крупних науково-технічних прикладних програм написано на Фортрані саме тому, що йому притаманні переносимість і стійкість, а також наявність багатьох вбудованих математичних функцій.

# 1 ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКИХ КРИВИХ ЛІНІЙ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ

## 1.1 Сфери застосування кривих ліній

Криві лінії займають провідне місце у різних галузях науки і техніки. Вони знайшли широке застосування в геометричному моделюванні різних технічних об'єктів, процесів і явищ. Кривими лініями описуються обводи суден [5, 25, 26, 35, 43, 57, 75, 95], літаків [1, 28], автомобілів [62], профілі лопаток турбін, турбодетандерів і компресорів [4, 6, 27, 29, 30, 32, 39, 42, 54, 73, 89], гідромуфт і гідротрансформаторів [33], різального інструменту [41, 60, 74], перехідні криві залізничних та автомобільних шляхів [3, 37, 77, 81, 84, 87, 94] тощо. Криві лінії також застосовуються при розв'язанні питань, пов'язаних з автоматизацією технологічних процесів у важкій [36] і легкій галузях промисловості [56].

Дослідженню цих важливих з багатьох точок зору геометричних образів у науковій літературі приділено достатньо уваги. Їх результати висвітлені в багатьох статтях, монографіях і дисертаціях [2, 38, 44, 55, 58, 76, 78, 80, 82, 83, 86, 91 – 93]. Значна роль у дослідженні кривих і поверхонь належить фахівцям і науковцям, які працюють у галузі прикладної геометрії [40, 46, 48 – 50, 52, 53]. Особливим стимулюючим чинником розробки нових підходів до геометричного моделювання кривих і поверхонь, удосконалення існуючих методів їх подання, виявлення тих чи інших їх особливостей обумовили потреби комп'ютерної графіки в плані унаочнення об'єктів, процесів і явищ.

Бурхливий розвиток комп'ютерної техніки практично зняв з порядку денного такі питання як швидкодія, обсяг пам'яті, роздільна здатність екрану монітора комп'ютера, що дозволило майже миттєво візуалізувати навіть ті лінії, в основі опису яких покладені достатньо складні математичні методи.

В епоху докомп'ютерних технологій дослідникам, які працювали в сфері розробки нових методів побудови кривих ліній, основні зусилля доводилося спрямовувати саме на пошук аналітичних шляхів розв'язання поставленої задачі. З появою сучасних швидкодіючих персональних комп'ютерів, доступних широкому колу інженерно-технічних кадрів, фахівцям різних галузей науки, важливість аналітичних методів при побудові ліній дещо знизилася, оскільки у справі їх моделювання суттєво зросла роль числових методів. Це значно розширило коло задач, які раніше неможливо було розв'язувати або у зв'язку з математичними складнощами, або недостатньою потужністю обчислювальної техніки.

Аналіз літературних джерел показав, що зацікавленість у розробці нових, більш досконалих методів моделювання кривих ліній пояснюється наступними причинами:

1. Процес створення будь-якого технічного об'єкта неминуче містить етапи, на яких визначається його зовнішня або внутрішня форма.

2. Більшість математичних моделей синтезу та аналізу варіантів конструкції використовує як вихідну інформацію саме геометричний опис проєктованого об'єкта.

3. Геометрія є природною ланкою, яка сполучає етапи проєктування та технологічної підготовки виробництва технічних об'єктів.

Розробка геометро-математичного забезпечення вимагає розв'язання наступних основних задач:

1. Створення нових і подальший розвиток існуючих методів подання геометричних об'єктів – кривих ліній та поверхонь.

2. Розробку програмних засобів, призначених для комп'ютерної реалізації та візуалізації результатів розрахунків, опису змодельованих кривих ліній і поверхонь, розрахунку їх геометричних характеристик.

Серед задач першої групи особливо важливим є розробка алгоритмів, призначених для побудови (формування) плоских і просторових обводів, які відповідають наперед обумовленим вимогам. Застосування того чи іншого методу подання кривих у значній мірі залежить від можливості їх ефективної комп'ютерної реалізації.

Відомо, що криві лінії розділяються на плоскі та просторові. Розглянемо спочатку моделювання плоских кривих ліній і, перш за все, визначимося зі способами їх задання.

## 1.2 Способи задання плоских кривих ліній

Крива лінія – геометричне поняття, яке визначається в різних галузях науки по-різному. У межах елементарної геометрії поняття кривої не отримує чіткого формулювання. В аналітичній геометрії розглядається доволі невелика кількість типів різноманітних ліній (пряма, коло, конічні перерізи тощо).

У диференціальній геометрії під кривою лінією розуміють геометричне місце точок, в якому при досить малому околі кожної точки воно є простою дугою. При цьому проста дуга визначається двома умовами:

1. Топологічно вона еквівалентна відрізку прямої.
2. У кожній точці дозволяє побудувати дотичну, яка неперервно обертається при переміщенні точки дотику.

Під плоскою кривою розуміють криву, всі точки якої розташовуються в деякій площині.

Плоску криву можна задати одним із наступних аналітичних способів:

в явному вигляді

$$y = f(x), \quad x \in (a, b);$$

у неявному вигляді

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G,$$

де  $(a, b)$  – проміжок на числовій осі;

$G$  – деяка область на площині.

Але найбільш зручними способами подання плоских кривих є векторно-параметричний

$$\mathbf{r}(t) = (x(t)\mathbf{i}, y(t)\mathbf{j}), \quad t \in (a, b)$$

та координатно-параметричний

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (a, b),$$

які фактично відрізняються лише формою запису.

На жаль, можливості аналітичних методів дуже часто бувають обмеженими, оскільки практичні потреби формування обводів вимагають надання їм достатньо складної геометричної форми, що майже унеможливає застосування універсального аналітичного задання цих об'єктів у цілому за допомогою елементарних функцій. Тому складні обводи доводиться описувати сукупністю простих гладких фрагментів – ділянок кривих, кожна з яких з достатньою для практики точністю може бути подана у вигляді елементарної функції.

З появою обчислювальної техніки при геометричному моделюванні кривих широко застосовуються такі методи, як Ерміта [44], Безьє [91], Бола [82], бета-сплайнів [44], Catmull-Rom сплайнів [83], *B*-сплайнів [91]. Певного поширення, особливо в комп'ютерній графіці, набули так звані NURBS-криві, які є неоднорідними раціональними сплайнами Безьє і задаються координатами початкової і кінцевої точок та сукупністю проміжних точок [91]. Усі ці перелічені методи мають певне аналітичне підґрунтя, у зв'язку з чим відпадає необхідність запам'ятовувати координати кожної точки моделюваної кривої. Це дозволяє створювати складні криволінійні об'єкти з невеликою кількістю управляючих вершин. Але саме доцільний вибір координат управляючих вершин є трудомісткою операцією для отримання бажаного результату. Ця операція не є однозначною та залежить від кваліфікації працівника не тільки в геометрії кривих, але й своїй предметній галузі.

### **1.3 Моделювання плоских кривих у натуральній параметризації**

Останніми роками посилюється інтерес до дослідження й моделювання кривих ліній із застосуванням їх параметричних рівнянь, в яких за параметр приймається довжина дуги кривої  $s$ . Згідно з термінологією, прийнятою в диференціальній геометрії, подібні рівняння називаються натуральними рівняннями кривих.

У диференціальній геометрії криві лінії вивчаються методами диференціального числення. При цьому передбачається, що функції, які входять

до рівняння, є неперервними, також неперервними вважаються і похідні цих функцій до того порядку, який обумовлюється характером досліджуваного питання.

Фундаментальні дослідження з моделювання кривих ліній закладені та розвинуті в роботах таких фахівців з диференціальної геометрії, як Норден А.П. [45], Рашевський К.П. [59], Фініков С.П. [72] та інших. Але цих фахівців здебільшого цікавили теоретичні питання формоутворення кривих ліній та поверхонь, доведення чисельних теорем тощо. У меншій мірі вони торкалися практичних питань.

У літературі, наприклад [61, 78], можна знайти приклади кривих, які мають натуральні рівняння, тобто для них можуть бути знайдені рівняння у функції довжини дуги. Але подібних кривих обмаль і не всі вони можуть бути корисними в практичних застосуваннях.

З диференціальної геометрії відомо, що плоска крива може бути однозначно визначена її натуральним рівнянням:

$$k = k(s), \quad (1.1)$$

де  $k$  – кривина кривої;  $s$  – довжина дуги.

У цій гілці геометрії показано, що кривина кривої дорівнює швидкості зміни кута  $\varphi$  нахилу дотичної до неї при її русі по кривій і визначається межею відношення кута між дотичними в початковій та кінцевій точках приросту довжини дуги на цей приріст, тобто

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = k.$$

Величину  $k$  називають кривиною кривої в даній точці.

Під довжиною дуги кривої розуміється межа довжини ламаної лінії, вписаної в цю дугу, коли кількість ланцюгів ламаної необмежено зростає, а довжина кожного ланцюга прагне до нуля.

Оскільки точки кривої та значення довжини дуги  $s$  знаходяться у взаємнооднозначній та неперервній відповідності, то довжину дуги  $s$  можна прийняти за новий параметр. Цей параметр особливо зручний при вивченні кривої за її рівнянням, він називається натуральним параметром кривої.

Значення натурального параметра для деякої точки кривої дорівнює довжині дуги кривої між деякою точкою, прийнятою за початкову, та даною точкою. Знак цього параметра визначається в залежності від вибору напрямку руху по кривій, умовно прийнятого за додатний.

Отже, кривина кривої  $k$  визначається наступною залежністю:

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}, \quad (1.2)$$

де  $\varphi$  – кут нахилу дотичної.

Розглянемо деяку довільну ділянку плоского криволінійного обводу, показаного на рис. 1.1. На цьому рисунку застосовані наступні позначення:  $S$  – довжина дуги обводу;  $ds$  – приріст довжини дуги;  $dx$  і  $dy$  – прирости декартових координат;  $\varphi(0)$  – кут нахилу дотичної в початковій точці ділянки кривої (надалі він приймається за сталу інтегрування);  $\varphi(S)$  – кут нахилу дотичної в кінцевій точці ділянки кривої.

Кривій, показаній на рис. 1.1, відповідає певний графік розподілу її кривини  $k(s)$ , побудований в залежності від довжини дуги обводу.

Якщо кривина кривої вигляду (1.1) подається залежністю з відомим рівнянням, то можна змоделювати плоску криву, яка відповідатиме цій залежності.

З виразу (1.2) можна знайти диференціал кута  $d\varphi$ , проінтегрувавши який визначити кут нахилу дотичної до кривої в довільній її точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds. \quad (1.3)$$

З розгляду рис. 1.1 випливає, що

$$dx = ds \cos \varphi(s);$$

$$dy = ds \sin \varphi(s).$$

Інтегруванням цих виразів отримують параметричне рівняння кривої, в залежності від довжини дуги [45, 59]:

$$\begin{aligned}x(s) &= x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds; \\y(s) &= y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Зазвичай інтеграли у виразах (1.4) аналітично не беруться, їх обчислення можливе тільки числовими методами інтегрування.

Дослідження кривих у натуральній параметризації, виконані останніми роками, умовно можна розділити на дві групи.

До першої групи відносяться наукові роботи, автори яких спрямовували свої зусилля на пошук раніше невідомих кривих, що подаються натуральними рівняннями. До наукових праць, в яких розглядаються питання формалізованого опису не тільки кривих ліній, але й поверхонь, визначенням різноманітних характеристик цих геометричних образів, пошуком плоских кривих, які мають натуральні рівняння, можна віднести наступні [46 – 52].

У сучасній літературі з прикладної геометрії можна знайти різні підходи до визначення координат кривої за рівняннями (1.4). Так, в роботі [38] пропонується наближений опис кривої шляхом представлення підінтегральних функцій у виразах (1.4) рядами Фур'є. Треба відмітити, що у цій роботі передбачається залежність кривини, яка базується на тригонометричній функції "косинус":

$$k(s) = \cos s - 1/R,$$

де  $R$  – деяке ціле число.

У літературі можна знайти застосування функції зміни кривини у вигляді:

$$k = k(\bar{s})M_s d\bar{s}, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1,$$

де  $k(\bar{s})$  – визначена функція або графік зміни кривини на одиничній довжині  $0 \leq \bar{s} \leq 1$ ;  $M_s$  – масштабний коефіцієнт, який визначається в процесі моделювання кривої.

Але при цьому не вказується, як задавати графік зміни кривини на одиничній довжині, який вигляд він повинен мати. Це суттєво затрудняє

застосування запропоновано методу моделювання кривої в параметричному поданні.

У роботі [53] досліджені плоскі криві з натуральним рівнянням наступного вигляду:

$$k(s) = a \sin bs + c. \quad (1.5)$$

Параметричні рівняння кривої за формулами переходу

$$x = \int \cos\left(\int k ds\right) ds;$$

$$y = \int \sin\left(\int k ds\right) ds$$

призводили до остаточного результату, який дозволяв визначати ортогональні координати плоскої кривої шляхом числового інтегрування таких виразів:

$$x = \int \cos\left(cs - \frac{a}{b} \cos bs\right) ds;$$

$$y = \int \sin\left(cs - \frac{a}{b} \cos bs\right) ds.$$

Але в цій роботі нічого не говориться відносно визначення невідомих коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  та довжини дуги  $S$  для отримання кривої, яка відповідає заданим умовам її моделювання.

У роботі [76] для геометричного моделювання візерунків застосовувалася функція, яка у натуральній параметризації подавалася рівнянням наступного вигляду:

$$k(s) = \left[1 + p \arccos^m(\cos^n(s))\right]^w,$$

де  $p$ ,  $m$ ,  $n$  і  $w$  – параметри, які визначають форму кривої.

Моделювання кривих відбувалося в середовищі математичного процесора Maple. Зазначимо, що автора цієї роботи цікавила тільки форма візерунків, які мали хитромудру форму, і, зрозуміло, при цьому не ставилася задача проведення якоїсь визначеної кривої, зокрема такої, що відповідає певним наперед заданим умовам.

До другої групи відносяться дослідження, пов'язані з пошуком значень коефіцієнтів апріорі прийнятих залежностей розподілу кривини від довжини дуги кривої, які впливають із заданих умов її моделювання. Сю-

ди можна віднести роботи авторів цієї монографії, Спіцина В.Є. [19 – 22], Комара В.С. [15 – 17], Лі В.Г. [40], Легети Я.П. [38], а також інших вітчизняних фахівців з прикладної геометрії. За кордоном це питання в деяких аспектах розглядалось у роботах Т.К. Пала [88], А. Шектера [92, 93].

#### **1.4 Приклади моделювання кривих із синусоїдальним законом розподілу кривини**

Розглянемо моделювання плоских кривих із законами розподілу кривини від власної довжини дуги, в основі яких застосовано тригонометричну функцію – синус, запропоноване в роботі [63].

Спочатку змодельюємо криві з законом розподілу у вигляді (1.5) з різними значеннями коефіцієнтів. Отримані при цьому графічні результати наведені на рис. 1.2 – 1.11. На всіх цих рисунках, а також на наступних рисунках цього підрозділу, градування координатних осей виконано з кроком 0,25. Підписи під рисунками містять вираз синусоїдального розподілу кривини, за яким було отримано ці конкретні графічні результати.

Наведені дані свідчать про те, що форма кривих суттєво залежить від величини коефіцієнта  $a$  (див. рис. 1.2 – 1.5). Зазначимо, що цей коефіцієнт збільшувався від одиниці до чотирьох.

Розрахунки показали, що при сталому значенні коефіцієнта  $a$  величина коефіцієнта  $b$  впливає на кількість виступів і западин, отриманої геометричної форми, збільшуючи їх кількість прямопропорційно зростанню коефіцієнта  $b$  (див. рис. 1.6 – 1.7). До речі, хоча на попередніх рисунках коефіцієнт  $a$  варіювався, але коефіцієнт  $b$  був величиною сталою і дорівнював трьом. Саме трьом дорівнює кількість зубів і западин, що яскраво проявляється на рис. 1.4 і 1.5.

На рис. 1.8 – 1.11 наведені результати моделювання кривих з коефіцієнтом  $b$ , який дорівнював ірраціональному числу  $\pi$ . Як свідчать ці дані, форма кривих суттєво змінилася. Вона не вписується в передбачувану форму, яка впливає з розгляду рис. 1.5 і 1.6, тобто тими кривими, які моделювалися з коефіцієнтом  $b$ , який дорівнював трьом і чотирьом, саме між цими значеннями знаходиться число  $\pi$ .

Були також проведені розрахунки з розподілом кривини, в якому замість синуса застосовувалася тригонометрична функція косинус. Отримані при цьому криві нагадували вище розглянуті, але були симетричними їм відносно осей координат. Зрозуміло, що інформація, наведена на рис. 1.2 – 1.11 має ілюстративний характер. Вона демонструє моделювання різноманітних кривих за наявності певного закону розподілу кривини від довжини дуги.

Зазначимо, що розрахунки проводилися при таких значеннях довжини дуги, які б забезпечували побудову всієї кривої, а не окремої її частини. У зв'язку з цим максимальне значення довжини дуги, яке вимірювалося в  $\pi$  одиницях, сягало, в залежності від варіанту, восьми – шістнадцяти  $\pi$  і навіть більше.

Розглянемо геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням закону розподілу кривини від довжини власної дуги, взятому в наступному вигляді:

$$k(s) = A \sin^2(bs) + 1, \quad (1.6)$$

де  $A$  і  $b$  – коефіцієнти, що варіюються.

Нижче наведені результати моделювання плоских кривих із застосуванням синусоїдального закону розподілу кривини, взятому у вигляді (1.6).

Інформація, яка наведена на рис. 1.12 – 1.23, також має чисто ілюстративний характер, вона демонструє можливості запропонованого методу моделювання плоских кривих на базі відомих законів розподілу кривини від довжини дуги модельованої кривої.

Інтегрування рівнянь (1.4) відбувалося числовим методом трапецій з кількістю інтервалів розбиття 2000. При цьому візуалізація отриманих розрахункових результатів відбувалася майже миттєво.

По підписуваних підписах на рисунках зробимо пояснення, що у зв'язку з їх однотипністю та громіздкістю вказувалися тільки рівняння законів розподілу кривини, за якими зображені криві моделювалися.

На рис. 1.12 – 1.22 продемонстровано вплив коефіцієнта  $A$  при сталому значенні коефіцієнта  $b$  у виразі (1.6). Як свідчать наведені графічні результати моделювання кривих, їх форма суттєво залежить від коефіцієнта  $A$ .

Інформація, наведена на рис. 1.23, характерна тим, що вона отримана при значенні коефіцієнта  $A$  у виразі (1.6), рівному ірраціональному числу  $\pi$ . Порівняння рис. 1.23 з рис. 1.19 і 1.20, графічні результати яких отримані з коефіцієнтами  $A$  в певній мірі близьких до числа  $\pi$ , свідчать про те, що криві для цих варіантів розрахунків різняться суттєво. У цілому рис. 1.23 сприймається як коло, в яке вписано сім петлеподібних кривих.

Отже, на рис. 1.12 – 1.23 продемонстровано вплив коефіцієнта  $A$  при сталому значенні коефіцієнта  $b$ , яке дорівнювало одиниці. Коефіцієнт  $A$  зростає від 0,25 (невеликого значення), до семи (вельми великої величини). У всіх випадках, окрім варіанту з коефіцієнтом  $A$ , рівним двом, отримані криві були замкнені, а в варіанті з  $A = 2$  (див. рис. 1.18) виявилася незамкнена нескінченна ланцюгова крива.

Графічні залежності, показані на рис. 1.24 – 1.27, були отримані за дещо іншим, хоча і синусоїдальним, законом розподілу кривини. Цей закон мав наступний вигляд:

$$k(s) = A \sin^2(s) + \sin(s) + 1.$$

Від попереднього закону він відрізняється тим, що до нього додано синусоїдальну залежність першого степеня.

Як впливає з розгляду цих рисунків коефіцієнт  $A$  суттєво впливає на остаточний результат.

Розрахунки, пов'язані з моделюванням кривих та їх візуалізацією, проводилися із застосуванням спеціально розробленого програмного коду.

### **1.5 Моделювання кривих з лінійним законом розподілу кривини**

Розглянемо спочатку моделювання кривих з лінійним законом розподілу кривини від довжини дуги. Один із можливих варіантів цього закону наведено на рис. 1.28, на якому під  $k$  розуміється кривина кривої, а  $S_1$  і  $S_2$  позначають початкове та кінцеве значення довжини дуги, відповідно.

Отже, представимо розподіл кривини у наступному вигляді:

$$k = as + b, \quad (1.7)$$

де  $s$  – параметр, асоційований з довжиною дуги кривої;  $a$  і  $b$  – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі моделювання кривої.

Якщо значення кривини в початковій і кінцевій точках відомі, то коефіцієнти рівняння (1.7) визначаються дуже просто:

$$a = \frac{k_2 - k_1}{S_2 - S_1};$$

$$b = k_1 - S_1 a.$$

Зазначимо, що окремими випадками кривих, побудованих на базі лінійного закону зміни кривини, можуть бути відрізок прямої лінії довжини  $(S_2 - S_1)$ , коли кривина в початковій  $k_1$  і кінцевій  $k_2$  точках кривої дорівнює нулю (отже графік кривини збігається з віссю  $x$ ), або дуга кола радіуса  $1/k$  і довжини  $(S_2 - S_1)$ , коли кривина має однакові значення в указаних точках, відмінні від нуля, тобто  $k_1 = k_2$ . Графік розподілу кривини при цьому проходить паралельно осі  $x$ .

За вказаних вище умов визначення координати кривої обводу не подає особливих труднощів, але в різних практичних застосуваннях виникає потреба визначати координати точок криволінійного обводу за умови, що відомі координати початкової та кінцевої точок кривої, а також кути нахилу дотичних до обводу в цих же точках (рис. 1.29).

Покажемо, що у такому випадку для подання обводу можна застосувати лінійний закон розподілу кривини (1.7), але при цьому невідомими будуть початкове  $k_1$  і кінцеве  $k_2$  значення кривини (або коефіцієнти  $a$  і  $b$ ) і довжина дуги кривої  $S$ .

Оскільки закон розподілу кривини відомий, а також відомі кути нахилу дотичної в початковій і кінцевій точках, то проінтегрувавши вираз (1.3) отримаємо залежність розподілу кута нахилу дотичної до модельованої кривої від її довжини:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds = \varphi(0) + \frac{as^2}{2} + bs. \quad (1.8)$$

Інтегруванням цих виразів одержують параметричне рівняння кривої, в якому за параметр прийнято довжину дуги:

$$\begin{aligned}
 x(s) &= x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds; \\
 y(s) &= y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Отримані рівняння (1.9) є рівняннями відомої в математиці кривої – клотоїди, яка є інваріантною по відношенню до повороту системи координат і залежить тільки від положення початкової та кінцевої точок.

З метою підтвердження працездатності розглянутого методу геометричного моделювання криволінійних обводів із застосуванням лінійних графіків розподілу кривини розроблено програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів у системі символної (аналітичної) математики Maple.

На рис. 1.30 показані дев'ять графіків розподілу кривини, які застосовані для побудови дев'яти криволінійних обводів. Результати моделювання в суміщеному вигляді наведені на рис. 1.31.

Розрахунки проводились за таких вихідних даних:  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $S = 2$ ,  $\varphi(0) = 45^\circ$ . На цих рисунках цифрами позначені номери графіків розподілу кривини та криволінійні обводи, що їм відповідають.

Наведені вище результати геометричного моделювання криволінійних обводів отримані за умови, що відомі значення кривини у початковій і кінцевій точках та довжина кривої. Але у загальному випадку значення кривини та довжина кривої, що моделюється, невідомі. У першу чергу це відноситься до коефіцієнтів  $a$  і  $b$  у рівнянні (1.7).

Для визначення невідомих коефіцієнтів запишемо параметричні рівняння кривої (1.9) в залежності від довжини дуги  $s$ , при цьому приймемо до уваги вираз (1.8). Після перетворень будемо мати:

$$\begin{aligned}
 x(S) &= x(0) + \int_0^S \cos \varphi(s) ds = x(0) + \int_0^S \cos \left[ \varphi(0) + \frac{as^2}{2} + bs \right] ds; \\
 y(S) &= y(0) + \int_0^S \sin \varphi(s) ds = y(0) + \int_0^S \sin \left[ \varphi(0) + \frac{as^2}{2} + bs \right] ds.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Записана система складається з двох рівнянь, але в ній три невідомих

величини. Крім коефіцієнтів рівняння (1.7), невідомою є також довжина дуги  $S$ . Для розв'язання цієї системи запишемо рівняння (1.8) для кінцевої точки модельованої кривої:

$$\varphi(S) = \varphi(0) + \frac{aS^2}{2} + bS. \quad (1.11)$$

Визначимо з виразу (1.11) невідомий коефіцієнт  $a$  і підставимо його до системи рівнянь (1.10):

$$a = \frac{2}{S^2} [\varphi(S) - \varphi(0) - bS].$$

Таким чином, кількість невідомих зменшилася до двох, це коефіцієнт  $b$  і довжина дуги кривої  $S$ . Але задавшись деякими їх значеннями, можна за виразами (1.10) розрахувати проміжні значення координат кінцевої точки кривої, які, зрозуміло, не будуть збігатися з вихідними значеннями координат цієї точки.

На підставі цих розрахунків визначається величина відхилення:

$$\delta = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2},$$

де  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів, а  $x$ ,  $y$  – координати заданої кінцевої точки модельованої кривої.

Прийнявши це відхилення за цільову функцію та застосувавши певний алгоритм її мінімізації, можна визначити з достатньою для практичного застосування точністю значення коефіцієнта  $b$  і довжини дуги ланки  $S$ .

Для пошуку невідомих  $b$  і  $S$  застосовано високоефективний алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком – Дживсом [85], перевагою якого є те, що у ньому не використовуються похідні від цільової функції по невідомим змінним.

Оскільки перенесенням системи координат завжди можна забезпечити нульові значення координат початкової точки, то задача проведення модельованої кривої зводиться до її побудови із початкової точки, яка збігається з початком координат, до деякої точки, розташованої в площині.

На рис. 1.32 наведені результати розв'язання тестової задачі, пов'язаної

з моделюванням трьох кривих з лінійними законами розподілу кривини. Всі три криві починаються з точки з нульовими координатами, але кут нахилу дотичної в ній варіювався від  $50^\circ$  (крива 1) до  $70^\circ$  (крива 3) з кроком  $10^\circ$ .

З розгляду цього рисунку випливає, що абсциса кінцевих точок не змінювалася, а ордината варіювалася у межах від двох до чотирьох. Кут нахилу дотичної в цій точці змінювався від  $-20^\circ$  (крива 1) до  $-40^\circ$  (крива 3) з кроком  $-10^\circ$ . Відрізки прямих ліній в початковій та кінцевій точках відповідають дотичним, проведеним до цих кривих. Вони наочно підтверджують збіг змодельованих кривих в цих точках з дотичними.

Висновок щодо лінійності розподілу кривини для кривих тестового прикладу можна зробити, розглянувши рис. 1.33. Ці графіки побудовані із застосуванням відносного значення довжини дуги  $\bar{s}$ . Цифри біля графіків розподілу кривини відповідають номерам кривих, показаних на рис. 1.32.

Зазначимо, що на змодельованих кривих, наведених на рис. 1.32, перегини відсутні. Підтвердженням цьому є графіки розподілу кривини (див. рис. 1.33), які не перетинають вісь абсцис.

Для побудови кривих з лінійним розподілом кривини та наявністю на них перегинів, були проведені розрахунки з вихідними даними, як і попередньому тестовому прикладі, але з додатними значеннями кутів нахилу дотичних в кінцевих точках. Отримані при цьому результати наведені на рис. 1.34. Навіть, як кажуть, неозброєним оком видно, що всі криві мають перегин. Це додатково підтверджують графіки розподілу кривини (рис. 1.35), за якими були змодельовані криві, показані на рис. 1.34. По-перше, всі три графіки мають лінійний характер, по-друге, всі вони перетинають горизонтальну вісь, що є математичним підтвердженням наявності на змодельованих кривих перегинів.

Зрозуміло, що зміна кутів нахилу дотичних до кінцевих точок кривих на протилежні, яка призвела до появи перегинів на змодельованих кривих, не є обов'язковою умовою. Отриманий результат є наслідком прийнятих для тестового прикладу вихідних даних.

Спираючись на отримані результати та проведені додаткові розрахункові дослідження можна прийти до висновку, що завдяки застосуванню лі-

нійних залежностей кривини від довжини дуги користувач має можливість моделювати криволінійні обводи в широкому діапазоні вихідних даних.

### 1.6 Моделювання складених кривих з лінійними законами розподілу кривини їх окремих ділянок

Розглянемо побудову складеної кривої за умови, що відомі координати деякої сукупності точок  $(x_i, y_i)$  і кути  $\varphi_i$  нахилу в них дотичних [23]. Кожну ланку складеної кривої будемо моделювати із застосуванням лінійної залежності кривина  $k_i$  від довжини дуги:

$$k_i = a_i s + b_i, \quad (1.12)$$

де  $a_i, b_i$  – коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі моделювання кожної ланки;  $s$  – довжина дуги криволінійної ланки, яка вимірюється від попередньої точки до наступної;  $i$  – номер ланки.

Як і у прикладі, розглянутому в попередньому підрозділі, для розрахунку координат точок кожної  $i$ -ої ланки необхідно знайти значення двох невідомих коефіцієнтів, а також довжину дуги  $S_i$  ланки. Таким чином, загальна кількість невідомих дорівнює трьом.

Скориставшись лінійною залежністю розподілу кривини (1.12) і підставивши її до виразу, подібному (1.11), визначимо коефіцієнт  $a_i$ :

$$a_i = \frac{2}{S_i} \left( \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{S_i} - b_i \right).$$

Отже, кількість невідомих зменшилася до двох, це коефіцієнт  $b_i$  і довжина дуги ланки  $S_i$ . Ці невідомі будемо визначати шляхом послідовного розв'язання (за кількістю ланок) задач мінімізації відхилення проміжно отриманих точок від заданих точок модельованої складеної кривої:

$$\delta_i = \sqrt{(\bar{x} - x_i)^2 + (\bar{y} - y_i)^2},$$

де  $\bar{x}, \bar{y}$  – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів;  $x_i, y_i$  – координати кінцевих точок кожної ланки складеної кривої.

Для пошуку невідомих  $b_i$  і  $S_i$  також застосуємо алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком – Дживсом.

На рис. 1.36 наведені результати розв'язання тестової задачі. Було взято шість довільних точок з відомими в них кутами нахилу дотичних. Для наочності в точках 1 – 6 побудовані відрізки прямих, які відповідають цим дотичним. У результаті розрахунків була побудована змодельована крива. Ознакою цієї кривої є те, що в точці 5 дотична нахилена до горизонтальної осі під кутом  $45^\circ$ .

З метою перевірки працездатності запропонованого методу моделювання складеної кривої була розв'язана задача з кутом нахилу дотичної в точці 5, який дорівнював  $-45^\circ$ . Як впливає з розгляду рис. 1.36 задача з цим кутом нахилу дотичної в довільно обраній точці 5 була розв'язана.

Якщо результати, показані на рис. 1.36, були отримані при заданих, хоча і довільним образом обраних значеннях кутів нахилу дотичних в проміжних точках 2 – 5, то на рис. 1.37 складена крива була побудована за умови, що кути нахилу дотичних в цих проміжних точках визначалися наступним чином. По всіх цих точках і кутах нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках будувався кубічний сплайн за методом, запропонованим в роботі [2].

Зрозуміло, що кути нахилу дотичних в проміжних точках змінилися, про це свідчать відрізки прямих, проведених до вихідних точок дотично до змодельованої складеної кривої. Для зіставлення на цьому рисунку сукупністю точок показано криву, яку побудовано із застосуванням кубічного сплайну.

Кривій, побудованій за допомогою лінійних графіків розподілу кривини від довжини дуги притаманні певні переваги. До цього висновки можна прийти, розглянувши ділянки 2 – 3 і 4 – 5.

Різниця між кривими, показаними на рис. 1.36 і 1.37, в значній мірі обумовлюється тим, що кути нахилу дотичних для результатів, наведених на рис. 1.36, задавалися довільно, без прийняття до уваги загального характеру проходження кривої.

На рис. 1.38 побудована складена крива, яка моделювалася з довільно обраними вихідними точками та кутами нахилу в них дотичних. Але на відміну від вище розглянутих прикладів, коли всі точки розташовувалися у

порядку зростання їх абсцис, на рис. 1.38 точки 3 і 6 не відповідають цьому принципу, не зважаючи на це складена крива була побудована.

Слід відзначити, що побудувати кубічний сплайн (якщо сплайн не параметричний) по точках, розташованих за принципом, застосованим при моделюванні кривої, наведеної на рис. 1.38, неможливо.

На рис. 1.39 наведені складені криві, які моделювалися по чотирьох точках та відомих у них кутах нахилу дотичних. На рис. 1.39,*а* вихідні точки розташовані упорядковано з плавною зміною кута нахилу дотичною.

Графічні дані, наведені на рис. 1.39,*б*, отримані за умови, що точки 2 і 3 були поміняні місцями, також були змінені кути нахилу в них дотичних. Зрозуміло, що результуюча складена крива суттєво змінила свою форму. У той же час слід ще раз підтвердити, що запропонований метод моделювання кривої виявився працездатним.

На рис. 1.40 показана цікава крива, яка отримана при розташуванні вихідних точок на двох горизонтальних лініях, у трьох точок кути нахилу дотичних становили  $90^\circ$ .

Зазначимо, що всі показані у цьому підрозділі криві є інтерполяційними, оскільки вони проходили через всі задані вихідні точки.

Наведені приклади моделювання складених кривих з лінійними розподілами кривини від довжини дуги окремих її компонентів наочно підтверджують можливість побудови цих кривих при довільному розташуванні вихідних точок і довільних значеннях в них кутів нахилу дотичних. Подібні криві можуть застосовуватися при створенні криволінійних обводів виробів технологічно складних галузей промисловості.

### **1.7 Моделювання плоских кривих з квадратичною залежністю кривини від довжини дуги**

Розглянемо моделювання кривої за вихідними даними, наведеними на рис.1.41, тобто коли відомі координати трьох точок і кути нахилу дотичних в кінцевих точках ділянки кривої. Подібні ситуації мають місце, наприклад, при моделюванні профілів лопаток турбін, коли, окрім точок на вхідній і вихідній кромках профілю, задана проміжна точка (точка *l*), яка

знаходиться в горлі міжлопаткового каналу.

Визначимо залежність кривизни кривої від довжини її дуги поліномом другого ступеня:

$$k(s) = as^2 + bs + c, \quad (1.13)$$

де  $a, b, c$  – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі моделювання кривої.

Підставивши вираз квадратичного закону розподілу кривини у вигляді (1.13) до (1.3), після інтегрування отримаємо наступну залежність кута нахилу дотичної вздовж модельованої кривої:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_0^s (as^2 + bs + c) ds = \varphi_0 + \frac{as^3}{3} + \frac{bs^2}{2} + cs. \quad (1.14)$$

Для визначення координат точок 1 і 2 скористуємося залежностями (1.4), які послідовно застосуємо спочатку для точки 1, а потім для точки 2:

$$x_1 = x_0 + \int_0^{S_1} \cos k(s) ds; \quad y_1 = y_0 + \int_0^{S_1} \sin k(s) ds; \quad (1.15)$$

$$x_2 = x_1 + \int_{S_1}^{S_2} \cos k(s) ds; \quad y_2 = y_1 + \int_{S_1}^{S_2} \sin k(s) ds. \quad (1.16)$$

У записаних виразах (1.15) і (1.16) під  $S_1$  розуміється довжина дуги кривої на ділянці  $O1$  кривої, а під  $S_2$  – на ділянці  $12$ .

Крива може бути побудована, якщо будуть визначені п'ять невідомих величин, до яких відносяться коефіцієнти  $a, b, c$  рівняння розподілу кривини (1.13) і довжини дуг  $S_1$  і  $S_2$ . Для знаходження цих невідомих величин необхідно мати п'ять рівнянь. До цих рівнянь відносяться чотири параметричних рівняння, що дозволяють визначити координати точок 1 і 2, а також рівняння (1.14), записане для кінцевої точки модельованої кривої:

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + cS,$$

де  $S = S_1 + S_2$ .

З цього виразу можна знайти коефіцієнт  $a$ , що дозволить зменшити кількість величин, які підлягають визначенню, до чотирьох.

Дійсно,

$$a = \frac{3}{S^2} \left( \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{S} - \frac{bS}{2} - c \right).$$

Визначення чотирьох невідомих (коефіцієнтів  $b$  і  $c$  рівняння (1.13) і довжин дуг  $S_1$  і  $S_2$ ) здійснимо рішенням оптимізаційної задачі, пов'язаної з мінімізацією відхилень проміжно побудованої кривої (при деяких значеннях невідомих коефіцієнтів і довжин дуг) від заданих точок  $1$  і  $2$ .

Оскільки в задачі, що розв'язується, існують два критерії, бо крива, яка вийшла з точки  $0$  має пройти спочатку через точку  $1$ , а потім через точку  $2$ , то вона відноситься до класу багатокритеріальних задач. У цій роботі для її розв'язання застосовано метод Гермейера [34], який передбачає використання для цільової функції (у нашому випадку існують дві цільові функції  $W_i$ ) єдиного показника  $Q$ , в якому цим складовим приписують різну вагу  $\lambda_i$ , пронормовану на  $1$ . Тобто

$$Q = \sum \lambda_i W_i,$$

$$\sum \lambda_i = 1.$$

Отже, в оптимізаційній задачі використовувався наступний вираз для цільової функції:

$$Q = \lambda_1 \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2} + \lambda_2 \sqrt{(x'_2 - x_2)^2 + (y'_2 - y_2)^2}, \quad (1.17)$$

де  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – нормувальні коефіцієнти, сума яких дорівнює одиниці;

$x'_1, y'_1$  і  $x'_2, y'_2$  – координати точок, аналогічних точкам  $1$  і  $2$ , але отриманих при проміжних значеннях невідомих величин варійованих під час розв'язання оптимізаційної задачі.

Введення до цільової функції нормувальних коефіцієнтів  $\lambda_i$  дозволяє двохкритеріальну задачу звести до однокритеріальної. У нашому випадку результуюча крива повинна пройти через дві задані точки  $1$  і  $2$ .

Для розв'язання оптимізаційної задачі був застосований алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком – Дживсом.

На рис. 1.42 для прикладу наведені п'ять кривих, змодельованих із застосуванням квадратичної залежності кривини від довжини дуги. Цифрами на рисунку позначені середні та крайні праві точки кривих. Ці точки виділені колами невеличкого радіусу. Крайні ліві точки кривих збігалися з початком координат. Кут нахилу дотичної  $\varphi_0$  в точці з нульовими координатами

натами для всіх кривих дорівнював  $20^\circ$ , в кінцевих точках кривих кут  $\varphi_2$  варіювався в межах від  $-50^\circ$  до  $-90^\circ$  з кроком  $-10^\circ$ . Розрізнути ці криві на рис. 1.42 за кутом  $\varphi_2$  не важко.

Абсциси точок, позначених цифрою  $l$ , змінювалися в межах від 5 до 6 з кроком 0,2; ординати цих точок зростали від 1 до 3 з кроком 0,5. Координати кінцевих точок зростали синхронно з кроком 0,5.

Наведені на рис. 1.42 результати моделювання кривих з квадратичним законом розподілу кривини від довжини дуги свідчать про те, що, по-перше, запропонований метод є працездатним, по-друге, метод дозволяє отримувати прийнятні геометричні результати в широкому діапазоні варіювання вихідних даних.

Про розподіл кривини кривих по довжині дуги можна судити по графічним залежностям, показаним на рис. 1.43.

Як впливає з розгляду наведених даних, всі криві мають криволінійний вигляд, характерний для квадратичної залежності. Маленькі кола, зображені на кривих кривини, відповідають проміжній точці (точці  $l$ ) вихідних даних. Крива розподілу кривини, що має меншу довжину дуги, відповідає нижній кривій, зображеній на рис. 1.42.

Отже, комп'ютерна реалізація підтвердила працездатність запропонованого методу моделювання плоских кривих з використанням квадратичної залежності кривини від довжини її дуги.

### **1.8 Моделювання складених кривих з квадратичною залежністю кривини від довжини дуги**

Розв'яжемо наступну задачу. Нехай задані три точки, в яких відомі також похідні, визначені кутами  $\varphi_i$  нахилу дотичних. Необхідно побудувати плоску криву, що проходить через ці точки та має в них вказані кути нахилу дотичних.

Розглянемо моделювання плоскої кривої, яка складається із двох ділянок, що моделюються в натуральній системі координат, кривина яких підпорядковується квадратичній залежності від довжини дуги обводу:

$$k_i = a_i s^2 + b_i s + c_i, \quad (1.18)$$

де  $k_i$  – кривина кривої  $i$ -го сегменту;  $a_i, b_i, c_i$  – коефіцієнти, які підлягають визначенню при моделюванні кривої;  $s$  – поточна довжина дуги кривої;  $i$  – номер сегмента.

Стикування цих ділянок виконаємо за умови, що в спільній точці мають бути рівними значення похідних цих ділянок, а також кривина та похідні від кривини. Такі умови відповідають третьому порядку гладкості. Користуючись рівністю кривини і похідних від неї, можна встановити певний взаємозв'язок між невідомими коефіцієнтами виразу (1.18).

Зазначимо, що складені плоскі обводи в точках стику окремих ділянок кривих можуть мати різні вимоги щодо порядку їх гладкості.

Відомо, що гладкість першого порядку при спряженні кривих забезпечується загальною дотичною в точці стику; гладкість другого порядку – загальною дотичною та однаковими радіусами кривини спряжуваних ділянок кривих; при гладкості третього порядку до двох цих вимог додається вимога однакової швидкості зміни кривини спряжуваних кривих, що обумовлюється рівністю похідних від кривини по її довжині в точках стику.

Для зменшення обчислювальних труднощів прийнято, що в точках 1 і 2 (рис. 1.44) довжина дуги першого і другого сегментів буде дорівнювати нулю, тобто  $s = 0$ . Отже, якщо кривина у точці стикування сегментів є величиною однаковою, то можна отримати наступне:

$$a_1 S_1^2 + b_1 S_1 + c_1 = c_2, \quad (1.19)$$

де  $S_1$  – довжина дуги першого сегмента.

З того факту, що в точці стику сегментів похідна від кривини дуги є рівною, можна отримати

$$2a_1 S_1 + b_1 = b_2. \quad (1.20)$$

З урахуванням залежності (1.18), записаної, наприклад, для першої ділянки складеної кривої, можна отримати наступний вираз для визначення розподілу кута нахилу дотичної для цієї ділянки

$$\varphi(s) = \varphi_1 + \int_0^s k(s) ds = \varphi_1 + \frac{a_1 s^3}{3} + \frac{b_1 s^2}{2} + c_1 s. \quad (1.21)$$

Подібний вираз можна записати і для другої ділянки модельованої

кривої.

Вираз (1.21) для кінцевої точки першої ділянки кривої набуде наступного вигляду:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{a_1 S_1^3}{3} + \frac{b_1 s^2}{2} + c_1 S_1. \quad (1.22)$$

Для другої ділянки кривої цей вираз матиме вигляд:

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{a_2 S_2^3}{3} + \frac{b_2 S_2^2}{2} + c_2 S_2. \quad (1.23)$$

Вирази (1.22) і (1.23) дозволяють визначити коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$ , відповідно:

$$a_1 = \frac{3}{S_1^2} \left( \frac{\Delta\varphi_1}{S_1} - \frac{b_1 S_1}{2} - c_1 \right); \quad (1.24)$$

$$a_2 = \frac{3}{S_2^2} \left( \frac{\Delta\varphi_2}{S_2} - \frac{b_2 S_2}{2} - c_2 \right), \quad (1.25)$$

де

$$\Delta\varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1;$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_2.$$

Координати кінцевих точок модельованої складеної кривої розраховуються за виразами (1.15) і (1.16), в яких застосовуються координати точок 1 і 2, відповідно.

Для побудови бажаної складеної кривої необхідно визначити шість коефіцієнтів рівняння (1.18), взятого для двох ділянок, а також знати довжини дуг кривих  $S_1$  і  $S_2$ . Отже, необхідно визначити вісім невідомих величин, що потребує, відповідно, наявності такої ж кількості рівнянь.

У першу чергу, до цих рівнянь відносяться записані вище залежності, які зв'язують координати початкових і кінцевих точок сегментів кривих. До них додають вирази (1.19), (1.20) і (1.24), (1.25).

Пошук невідомих величин здійснюється шляхом розв'язання задачі мінімізації відхилення проміжно отриманої кривої від заданих точок 2 і 3 за допомогою алгоритму Хука – Дживса. У цій задачі за цільову функцію приймається вираз, подібний (1.17), в якому під першим коренем будуть застосовуватися координати другої точки, а під другим коренем – координати

нати третьої точки.

Безпосередньо при розв'язанні поставленої задачі задіяні чотири параметри:  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $S_1$  і  $S_2$ . Це обумовлюється тим, що коефіцієнти  $a_1$  і  $a_2$  можуть бути розраховані за виразами (1.24) і (1.25), а коефіцієнти  $c_2$  і  $b_2$  – за виразами (1.19) і (1.20).

Вище (див. рис. 1.44) наведені графічні результати розв'язання тестової задачі, пов'язаної з побудовою складеної з двох сегментів кривої, що проходить через довільно обрані точки  $1 - 3$ , в яких були задані кути нахилу дотичних. На цьому рисунку цифрами позначені вихідні точки, а літерами  $A$  і  $B$  – точки, які знаходяться на перетині дотичних, проведених до вихідних точок. Нахил дотичних визначається кутами  $\varphi_1 - \varphi_3$  у відповідних вихідних точках. Чотирикутник  $IAB2$  обумовлює зону, в якій має розташуватися модельована крива. Маленькі кола на кривій відповідають розрахунковим точкам, які потім з'єднані між собою. Як свідчать наведені дані, змодельована крива повністю відповідає поставленим умовам, вона проходить через задані вихідні точки та є дотичною до ламаної  $IAB2$ .

На рис. 1.45 наведені графіки розподілу кривини та похідної від неї, які наочно підтверджують той факт, що залежність кривини кривої від її довжини є плавною лінією. Графіки розподілу похідної кривини дуги від довжини дуги мають лінійний характер, але в точці стикування сегментів кривих, прями, що відповідають першому і другому сегментам, перетинаються, забезпечуючи рівність значень вказаних похідних.

Отже, графіки, які показані на рис. 1.45, підтверджують факт стикування двох ділянок кривих із забезпеченням третього порядку гладкості.

Для остаточної перевірки працездатності запропонованого методу моделювання складених кривих із застосуванням квадратичних залежностей кривини від довжини дуги були проведені розрахунки, пов'язані з визначенням можливості опису кола зазначеною складеною кривою.

За вихідні дані були взяті точки  $1$ ,  $2$  і  $3$  з заданими в них кутами нахилу дотичних. Точка  $2$  є точкою стику ділянок складеної кривої. Оскільки кут у  $90^\circ$  дуже часто подає проблем у числових розрахунках, то саме це значення кута було прийнято за кути нахилу дотичних у цих точках. Вихідні

точки були розташовані на півколі (рис.1.46).

Результати розрахунків за запропонованим методом на цьому рисунку показані сукупністю дискретних точок. На цьому ж рисунку побудовано дугу кола засобами програмного продукту, який було застосовано при розробці програми розрахунків і візуалізації результатів геометричного моделювання кривих ліній.

Як свідчать наведені дані, дискретні розрахункові точки знаходяться на дузі кола. Для контролю на рис. 1.46 показані графіки розподілу кривини та її похідної. З розгляду цих даних випливає, що ці графіки мають лінійний характер. Це є додатковим підтвердженням того, що побудовано криву у вигляді кола.

На рис. 1.47 побудовані чотири складені криві, які різняться значенням ординати точки стику (точка 2). Нижня крива є дугою кола, а три інші – дугами еліпсів.

### **1.9 Моделювання кривих з кубічною залежністю кривини від довжини дуги**

Розглянемо геометричне моделювання плоского криволінійного обводу, що проходить через три задані точки з заданими в них кутами нахилу дотичних [7]. Крива моделюється із застосуванням кубічного розподілу кривини:

$$k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d, \quad (1.25)$$

де  $a, b, c, d$  – невідомі коефіцієнти, які підлягають визначенню в процесі моделювання кривої.

Кубічному розподілу кривини відповідає наступна залежність кута нахилу дотичної до кривої від довжини дуги обводу:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \frac{as^3}{4} + \frac{bs^2}{3} + \frac{cs}{2} + d \cdot s, \quad (1.26)$$

де  $\varphi_0$  – кут нахилу дотичної до кривої в початковій точці.

Параметричні рівняння дуги криволінійного обводу, що задана за допомогою кубічного графіка кривини, з урахуванням (1.26) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_0^s \cos \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds; \\ y(s) &= y_0 + \int_0^s \sin \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds, \end{aligned} \quad (1.27)$$

де  $x_0, y_0$  – координати початкової точки криволінійного обводу.

Кубічний закон розподілу кривини кривої від довжини дуги застосовується у тих випадках, коли необхідно забезпечити проходження кривої через три задані точки площини з відомими в них кутами нахилу дотичних, або коли треба при двох заданих точках і відомих у них кутах нахилу дотичних забезпечити в цих точках нульові значення других похідних, що еквівалентно заданню нульових значень кривини в вихідних точках.

Для визначення координат точок криволінійного обводу, який генерується із застосуванням залежності (1.25), необхідно знати довжину кривої  $S$ , графік розподілу кривини  $k(s)$ , координати трьох точок  $x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2$ , а також кути нахилу в них дотичних  $\varphi_0, \varphi_1$  і  $\varphi_2$  (рис. 1.48).

Визначимо коефіцієнти залежності (1.25), яка у підсумку забезпечить проходження кривої через ці три точки із заданими значеннями кутів нахилу в них дотичних.

Для пошуку невідомих коефіцієнтів запишемо рівняння (1.27) для точок 1 і 2. Матимемо:

точка 1

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \int_0^{s_1} \cos \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds; \\ y_1 &= y_0 + \int_0^{s_1} \sin \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds, \end{aligned}$$

точка 2

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + \int_0^{s_2} \cos \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds; \\ y_2 &= y_0 + \int_0^{s_2} \sin \left[ \varphi_0 + \frac{as^4}{4} + \frac{bs^3}{3} + \frac{cs^2}{2} + d \cdot s \right] ds. \end{aligned}$$

У цих виразах, окрім коефіцієнтів  $a, b, c, d$ , невідомими є довжини

кривих обводів  $S_1$  і  $S_2$ , які вимірюються від нульової точки до точок  $1$  і  $2$ , відповідно.

Для зменшення кількості невідомих запишемо рівняння (1.26) для точок  $1$  і  $2$ , в яких також відомі кути нахилу дотичних:

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{aS_1^4}{4} + \frac{bS_1^3}{3} + \frac{cS_1^2}{2} + d \cdot S_1;$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{aS_2^4}{4} + \frac{bS_2^3}{3} + \frac{cS_2^2}{2} + d \cdot S_2.$$

Звідки отримуємо

$$a = \frac{\Phi_2 S_2 - \Phi_1 S_1}{S_2 - S_1} + \frac{2c}{S_1 S_2} + \frac{4d(S_1 + S_2)}{S_1^2 S_2^2};$$

$$b = \frac{3S_1 S_2 (\Phi_2 - \Phi_1)}{4(S_1 - S_2)} - \frac{3c(S_1 + S_2)}{S_1 S_2} - \frac{3d(S_1^2 + S_1 S_2 + S_2^2)}{S_1^2 S_2^2},$$

де

$$\Phi_1 = \frac{4(\varphi_1 - \varphi_0)}{S_1^4};$$

$$\Phi_2 = \frac{4(\varphi_2 - \varphi_0)}{S_2^4}.$$

Наявність виразів для коефіцієнтів  $a$  і  $b$  дозволила зменшити кількість невідомих до чотирьох, котрі, як і вище розглянутих прикладах моделювання кривих, визначаються шляхом розв'язання оптимізаційної задачі із застосуванням алгоритму Хука – Дживса.

Треба відзначити, що і у даному випадку задача є двохкритеріальною, оскільки крива, виходячи із точки  $O$  має пройти через точки  $1$  і  $2$ . За цільову функцію приймається вираз, подібний виразу (1.17), в якому також будуть задіяні нормувальні коефіцієнти  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ .

Результати розв'язання тестової задачі наведені на рис. 1.49. На цьому рисунку показані три криві лінії, які будувалися з різними вихідними даними по кутах нахилу дотичних у заданих точках і координатах  $x$  і  $y$  точок  $1$  і  $2$ . У нульовій точці кут нахилу дотичної зменшувався від  $90^\circ$  до  $80^\circ$  з кроком  $5^\circ$ . У точці  $1$  цей кут зростав від  $40^\circ$  до  $60^\circ$  з кроком  $10^\circ$ , і нарешті, в точці  $2$  кут нахилу дотичної зростав від  $10^\circ$  до  $20^\circ$  з кроком  $5^\circ$ . У вихід-

них точках відрізками прямих ліній показані дотичні до модельованих кривих. Розрізняти криві за значеннями кутів нахилу дотичних не дуже складно.

Як кажуть, для чистоти експерименту також змінювалися координати точок 1 і 2 з поступовим синхронним зростанням з кроком 0,5, що легко простежується при розгляді рис. 1.49.

Цифрове позначення кривих виконано з метою подальшого їх узгодження з графіками розподілу кривини.

Незважаючи на доволі суворі вимоги до вихідних даних усі криві були змодельовані, вони точнісінько пройшли через точки 1 і 2 та мали в них відповідні кути нахилу дотичних. Зазначимо, що у виразі цільової функції були застосовані наступні значення нормувальних коефіцієнтів:  $\lambda_1 = 0,8$  і  $\lambda_2 = 0,2$ . Виявилось, що провести криві через точку 1 складніше, ніж через точку 2. Цим пояснюється різниця в величинах нормувальних коефіцієнтів.

На рис. 1.50 наведені графіки розподілу кривини кривих змодельованих на рис. 1.49. За вісь абсцис на цьому рисунку прийнята відносна довжина дуги кривої. Цифрами позначена нумерація кривих, узгоджена з номерами кривих, показаних на рис. 1.49.

Щодо графіків розподілу кривини можна зробити наступні висновки. По-перше, ці графіки перетинаються в точках з однаковими значеннями абсцис. По-друге, зображені криві є кривими третього порядку. Про це яскраво свідчить крива, позначена цифрою 3. Вона тричі перетинає вісь абсцис, що математично строго підтверджує третій степінь її рівняння.

## **2 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ ЛІНІЙ У НАТУРАЛЬНІЙ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ**

### **2.1 Способи задання просторових кривих ліній**

Просторову, як і плоску криву, можна задавати в явному вигляді  $z = f(x, y)$ , або визначити її неявним способом:

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

якщо координати кожної її точки задовольняють обом рівнянням  $F(x, y, z) = 0$  і  $G(x, y, z) = 0$ .

Для задання просторових кривих часто використовуються векторно-параметричне

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in (a, b)$$

та координатно-параметричне подання

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in (a, b).$$

Вище зазначені методи Безьє, Бола, бета-сплайнів,  $B$ -сплайнів тощо дозволяють моделювати не тільки плоскі, але й просторові криві. Відносно просторових кривих, що моделюються цими методами, можна додати, що в цьому випадку управляючі вершини характерних ламаних мають бути розташовані також у просторі. Це суттєво ускладнює моделювання просторових кривих бажаної геометричної форми, такої, що відповідає певним, наперед заданим умовам.

При моделюванні просторових кривих також застосовуються їх параметричні рівняння, в яких за параметр при поданні кривини та скрута приймається довжина дуги кривої.

Просторові криві, що подаються параметричними рівняннями у функції натурального параметра, використовуються при розв'язанні багатьох задач, зокрема в диференціальній геометрії, оскільки до них можна застосовувати формули Френе. Для просторових кривих, що подаються параметричними рівняннями у функції натурального параметра, інколи вдається знайти натуральні рівняння: кривини та скруту. Але кількість таких кривих є доволі обмеженою.

Геометричному моделюванню просторових кривих ліній та їх дослідженню присвячено достатньо публікацій [40, 48, 52 та інші]. Відомі публікації, в яких пропонується будувати просторову криву, описану параметричними рівняннями у функції натурального параметра, за умови, що існує деяка плоска крива, яка приймається за горизонтальну проекцію просторової кривої.

У цілому ж, для надання кривій просторовості необхідно, крім кривини, додатково розглядати її скрут.

Як і у випадку плоских кривих, дослідження з просторових кривих можна умовно розділити на дві групи. В першій групі досліджень розшукуються натуральні рівняння просторових кривих, у другій – будуються ділянки просторових кривих, які відповідають певним умовам, наприклад, криві можуть проходити через задані точки простору та мати в них задані кути нахилу дотичних.

Так, в роботі [68] просторову криву пропонується моделювати за умови, що відомі графіки розподілу кривини та скруту від довжини  $s$  її дуги. Ділянка просторової кривої показана на рис. 2.1. На цьому рисунку під  $\varphi(s)$  розуміється кут нахилу дотичної до кривої в поточній точці, а під  $\psi(s)$  – кут відхилення кривої від дотичної площини в цій же точці.

З диференціальної геометрії [45, 59] відомо, що кривина та скрут дорівнюють швидкості зміни кутів, відповідно, нахилу дотичної  $\varphi$  та відхиленню кривої від дотичної площини  $\psi$ , тобто:

$$\frac{d\varphi}{ds} = k(s); \quad \frac{d\psi}{ds} = \tau(s).$$

Інтегруючи ці вирази, можна знайти кути нахилу дотичної та відхилення кривої від дотичної площини в довільній її точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s k(s) ds;$$
$$\psi(s) = \psi(0) + \int_0^s \chi(s) ds,$$

де  $\varphi(0)$  та  $\psi(0)$  – відповідно кут нахилу дотичної та кут відхилення кривої від дотичної площини в початковій точці кривої.

З розгляду рис. 2.1 випливає, що

$$dx = ds \cos \psi(s) \cos \varphi(s);$$

$$dy = ds \cos \psi(s) \sin \varphi(s);$$

$$dz = ds \sin \psi(s).$$

Інтегруванням цих виразів можна визначити координати точок просторової кривої [64]:

$$\begin{aligned}x(s) &= x(0) + \int_0^s \cos \psi(s) \cos \varphi(s) ds; \\y(s) &= y(0) + \int_0^s \cos \psi(s) \sin \varphi(s) ds; \\z(s) &= z(0) + \int_0^s \sin \psi(s) ds.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Для перевірки можливості геометричного моделювання просторових кривих із застосуванням залежностей (2.1) була розроблена відповідна програма розрахунків і візуалізації отриманих результатів. На рис. 2.2 і 2.3 наведені графічні залежності просторових кривих, які будувалися при варіюванні кута  $\varphi$  (рис. 2.2) і кута  $\psi$  (рис. 2.3). При нульових значеннях цих кутів, як і очікувалося, виходили плоскі криві. Так, при  $\varphi = 0^\circ$  побудована крива паралельна горизонтальній площині проєкцій  $xOz$ , по мірі збільшення цього кута криві все більше відхилялися від цієї площини. При  $\psi = 0^\circ$  побудована крива розташовується паралельно площині проєкцій  $xOy$ , по мірі збільшення цього кута криві також відхиляються від горизонтальної площини проєкцій.

Інтеграл у виразах (2.1) визначалися числовим методом. Для спрощення було застосовано метод трапецій, який при прийнятій кількості точок забезпечував достатньо приємний результат розрахунку координат точок кривих.

Слід зазначити, візуалізація отриманих результатів відбувалася у середовищі Wolfram Mathematica, вихідні дані для якої готувалися у розробленій програмі за умови, що досліджувані кути варіювалися за лінійною залежністю.

Аналізуючи вирази (2.1), можна зробити висновок, що при моделюванні просторових кривих застосовуються тільки два кути ( $\varphi$  і  $\psi$ ), хоча в диференціальній геометрії розглядаються три кути. До двох розглянутих кутів додається третій кут, який визначає нахил площини вимірювання кута  $\varphi$  (див. рис. 2.1) до горизонтальної площини проєкцій.

Цей кут позначимо літерою  $\chi$ . Сукупність трьох розглянутих кутів називають кутами Ейлера. Ці кути визначають положення відомого в диференціальній геометрії тригранника Френе, який розглядається в нерухомій системі координат з центром  $O$  та осями координат  $x$ ,  $y$  і  $z$ .

З урахуванням цих трьох кутів згідно з [72] залежності для побудови просторової кривої записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(0) + \int_0^s (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\chi) ds; \\ y(s) &= y(0) + \int_0^s (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\chi) ds; \\ z(s) &= z(0) + \int_0^s \sin\psi \sin\chi ds. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отже, для побудови просторової кривої за рівняннями (2.2) необхідно знати залежності кутів Ейлера від довжини дуги  $s$ .

Зробивши певні зміни в програмі, завдяки якій були отримані результати, показані на рис. 2.2 і 2.3, можна простежити вплив кута  $\chi$  на характер проходження просторових кривих. Для простоти прийняті лінійні залежності кутів  $\varphi$  і  $\psi$  та нульові їх значення в початковій точці.

На рис. 2.4 для прикладу наведені графічні залежності декартових координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  кривих від довжини дуги кривої, максимальне значення якої довільно було прийняте рівним 10. Характер проходження просторових кривих в залежності від кута  $\chi$  показано на рис. 2.5. При  $\chi = 0^\circ$  просторова крива вироджується в плоску, це є наслідком того, що третій інтеграл у виразах (2.2) при цьому значенні кута  $\chi$  дорівнює нулю.

Таким чином, запропонований в роботі [64] метод дозволяє моделювати просторові криві, але він не передбачає врахування всіх трьох кутів, уведених до розгляду Ейлером.

На завершення слід зазначити, що натуральні рівняння можна знайти для досить обмеженої кількості просторових кривих. Тому актуальним є розв'язання питань, пов'язаних з моделюванням просторових кривих, які відповідають наперед заданим умовам розробки проекту обводів того чи іншого технічного об'єкта.

## 2.2 Моделювання просторових кривих з лінійним розподілом кривини та скруту

Аналіз літературних джерел показав, що при геометричному моделюванні просторових кривих замість розподілів кутів Ейлера краще застосовувати графіки розподілів кривини та скруту. Так, кривій, показаних на рис. 2.1 відповідають певні графіки розподілу кривини  $k(s)$  і скруту  $\tau(s)$ .

Розглянемо моделювання просторових кривих з лінійними законами розподілу кривини та скруту, взявши їх у вигляді:

$$\begin{aligned}k(s) &= a_1 s + b_1; \\ \tau(s) &= a_2 s + b_2,\end{aligned}\tag{2.3}$$

де  $a_1, b_1, a_2, b_2$  – невідомі коефіцієнти лінійних графіків розподілу кривини та скруту, які визначаються в процесі моделювання просторової кривої.

Для цього закону розподілу кривини залежності, за якими можна обчислювати кути нахилу дотичної  $\varphi$  та відхилення кривої від дотичної площини  $\psi$ , матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varphi(0) + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s; \\ \psi(s) &= \psi(0) + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Застосувавши параметричні рівняння кривої (2.1) і підставивши до них координати початкової  $x(0), y(0), z(0)$  та кінцевої  $x(S), y(S), z(S)$  точок, а також довжину дуги  $S$ , у роботі [64] для побудови просторової кривої було отримано систему з трьох нелінійних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}x(S) &= x(0) + \int_0^S \cos\left(\psi(0) + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s\right) \cos\left(\varphi(0) + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s\right) ds; \\ y(S) &= y(0) + \int_0^S \cos\left(\psi(0) + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s\right) \sin\left(\varphi(0) + \frac{a_1 s^2}{2} + b_1 s\right) ds; \\ z(S) &= z(0) + \int_0^S \sin\left(\psi(0) + \frac{a_2 s^2}{2} + b_2 s\right) ds.\end{aligned}\tag{2.5}$$

У цій системі рівнянь задіяні п'ять невідомих величин, до яких відносяться чотири коефіцієнти залежностей (2.4) та довжина дуги кривої  $S$ . Кількість невідомих величин зменшується до трьох, якщо задані кути в початкових  $\varphi(0)$ ,  $\psi(0)$  та кінцевих  $\varphi(S)$ ,  $\psi(S)$  точках модельованих кривих. Це дозволяє завдяки рівнянням (2.4), записаним для кінцевих точок модельованих кривих, отримати вирази для визначення невідомих коефіцієнтів  $a_1$  і  $a_2$  законів розподілу кривини і скруту

$$a_1 = \frac{2}{S^2} [\varphi(S) - \varphi(0) - b_1 S];$$

$$a_2 = \frac{2}{S^2} [\psi(S) - \psi(0) - b_2 S]$$

Пошук коефіцієнтів  $b_1$ ,  $b_2$  і довжини дуги  $S$  здійснимо, як і у вище розглянутих прикладах, шляхом мінімізації відхилення проміжно отриманої кінцевої точки кривої від точки, заданої з вихідними даними.

Отже, за цільову функцію в задачі мінімізації візьмемо наступний вираз:

$$\Delta = \sqrt{(x_z - x_k)^2 + (y_z - y_k)^2 + (z_z - z_k)^2}.$$

У цьому виразі індекс "з" відповідає заданій точці, куди має прийти крива, а індекс "к" – кінцевій точці проміжно змодельованої кривої.

Для мінімізації цієї функції, як і у випадку плоских кривих, застосовувався алгоритм Хука–Дживса.

На рис. 2.6 для прикладу наведені горизонтальна, фронтальна і профільні проекції трьох змодельованих просторових кривих, які підпорядковувалися лінійним законам розподілу кривини і скруту.

Сітка, що нанесена на рисунку, виконана з кроком у дві одиниці. Це дозволило авторам нехтувати градуванням осьових ліній. На кінцевих точках проекцій кривих побудовані кола маленького радіуса. Початкові точки всіх кривих збігалися з початком координат. Завдяки нанесеній сітці координати кінцевих точок визначаються без особливих проблем.

Оскільки криві моделювалися з різними кутами  $\varphi$  і  $\psi$  в початковій і кінцевій точках, то є сенс їх вказати, щоб підтвердити можливість запро-

понованого методу моделювання просторових кривих в широкому діапазоні варіювання не тільки декартових координат, але й кутів нахилу дотичних. Так, кут  $\varphi$  в початковій точці для кривої  $I$  дорівнював  $30^\circ$  і поступово зменшувався з кроком  $10^\circ$  до  $10^\circ$  (крива 3). Цей же кут для кінцевих точок кривих зростав від  $70^\circ$  (крива 1) до  $90^\circ$  (крива 3) також з кроком  $10^\circ$ .

Кут  $\psi$  в початковій точці цих кривих зростав з кроком  $10^\circ$  від  $10^\circ$  (крива 1) до  $30^\circ$  (крива 3). І, нарешті, кут  $\psi$  для кінцевих точок кривих у порядку їх нумерування зменшувався від  $70^\circ$  до  $50^\circ$  з кроком  $10^\circ$ .

Відзначимо, що варіюючи значеннями вихідних даних, можна отримати широке коло різноманітних просторових кривих.

### **2.3 Моделювання просторових кривих з лінійним розподілом кривини та скруту із застосуванням рівнянь Ейлера**

Розглянемо моделювання просторових кривих із застосуванням рівнянь Ейлера (2.2), але при цьому застосуємо лінійні залежності кривини і скруту від довжини дуги, взяті у вигляді (2.3). За цих обставин розподіли кутів  $\varphi$  і  $\psi$  будуть визначатися залежностями (2.4). Залишається відкритим питання відносно кута  $\chi$ . Прийmemo спочатку цей кут як величину сталу.

Модернізуємо програму розрахунків і візуалізації отриманих результатів, розроблену в попередньому підрозділі. Модернізація пов'язана з визначенням декартових координат точок, що обумовлено появою в рівняннях Ейлера кута  $\chi$ . Все інше в програмі моделювання просторових кривих залишилося незмінним.

За вихідні дані візьmemo ті ж самі, що застосовувалися при отриманні результатів, наведених на рис. 2.6. Попередні розрахунки показали, що для забезпечення проходження кривих через задані кінцеві точки треба було взяти кут  $\chi$ , рівним  $40$  градусам.

Результати моделювання трьох кривих із застосуванням рівнянь Ейлера та лінійними законами розподілу кривини та скруту наведені на рис 2.7. Розглядаючи ці криві, неважко зробити висновок, що форма кривих суттєво змінилася по відношенню до тих кривих, які показані на рис. 2.6. Підтвердимо ще раз, що величина кута  $\chi$  підбиралася експеримен-

тально поступовим його збільшенням від  $10^\circ$  до  $40^\circ$ . Таке значення кута  $\chi$  пояснюється відносно великими значеннями аплікату кінцевих точок модельованих кривих.

Додамо до виразів (2.3) наступну лінійну залежність:

$$\kappa = a_3(s) + b_3,$$

в якій під  $\kappa$  будемо розуміти міру зміни нахилу площини вимірювання кута  $\varphi$  (див. рис. 2.1) до горизонтальної площини проєкцій, що асоціюється з розглянутим вище кутом  $\chi$ ;

$a_3$  і  $b_3$  – невідомі коефіцієнти, які визначаються в процесі моделювання просторової кривої.

Якщо кут  $\chi$  відомий в початковій і кінцевій точках кривої, то можна визначити коефіцієнт  $a_3$ :

$$a_3 = \frac{2}{S^2} [\chi(S) - \chi(0) - b_3 S].$$

Коефіцієнт  $b_3$  включимо до числа параметрів, що визначаються в процесі розв'язання оптимізаційної задачі, довівши їх кількість до чотирьох.

На рис. 2.8 наведені результати моделювання трьох просторових кривих, у яких кут  $\chi$  змінювався від  $10^\circ$  до  $30^\circ$  залежно від довжини дуги кривої. Порівнюючи ці дані з наведеними вище на рис. 2.7, відмітимо зміну форми кривих. У першу чергу це стосується фронтальних проєкцій кривих.

#### **2.4 Моделювання просторових кривих числовим розв'язанням рівнянь Френе**

Нагадаємо, що з диференціальної геометрії відомо [45, 59, 72], що просторова крива у натуральній параметризації визначається рівняннями:

$$k = k(s);$$

$$\tau = \tau(s),$$

де  $k$  – кривина кривої,  $\tau$  – скрут кривої.

Ці рівняння задають просторову криву однозначно і не залежать від

положення кривої у просторі.

У довільній точці  $M$  просторової кривої можна провести дотичну  $t$ , нормаль  $n$  і бінормаль  $b$ . Попарно ці вектори утворюють три площини: стичну, нормальну і спрямну (рис. 2.9).

Сукупність трьох прямокутних координатних осей і трьох координатних площин називається супровідним тригранником просторової кривої в довільній точці  $M$ . Рухаючись вздовж цієї кривої, супровідний тригранник у загальному випадку обертається навколо миттєвої осі та одночасно переміщується вздовж неї з певними швидкостями. Таким чином, супровідний тригранник здійснює гвинтовий рух.

Криві лінії будемо моделювати числовим розв'язанням рівнянь Френе за умови, що їх кривина і скрут задаються кусково-лінійними залежностями розподілів кривини і скрута від довжини власної дуги.

Вважаючи, що криву віднесено до параметра  $s$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

можна і вектори супровідного тригранника також вважати такими, що залежать від параметра  $s$ :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(s).$$

Френе розклав похідні від векторів  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  по дузі  $s$  і отримав наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}; \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}; \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau\mathbf{n}, \end{cases} \quad (2.6)$$

Компоненти векторів  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  та їх похідні згідно з роботою [66] можна записати наступним чином:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{dX}{ds}; \\ t_2 = \frac{dY}{ds}; \\ t_3 = \frac{dZ}{ds}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dt_1}{ds} = kn_1; \\ \frac{dt_2}{ds} = kn_2; \\ \frac{dt_3}{ds} = kn_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{db_1}{ds} = -\tau n_1; \\ \frac{db_2}{ds} = -\tau n_2; \\ \frac{db_3}{ds} = -\tau n_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{ds} = -kt_1 + \tau b_1; \\ \frac{dn_2}{ds} = -kt_2 + \tau b_2; \\ \frac{dn_3}{ds} = -kt_3 + \tau b_3. \end{cases}$$

Для числової реалізації та виконання розрахунків представимо вектори  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  через їх компоненти, які позначимо літерою  $z$  з відповідним індексом, який буде змінюватися у межах від 1 до 9. Тоді будемо матимемо:

$$\mathbf{t} = \{z_1, z_2, z_3\};$$

$$\mathbf{n} = \{z_4, z_5, z_6\};$$

$$\mathbf{b} = \{z_7, z_8, z_9\}.$$

Компоненти  $z_1, z_2, z_3$  є похідними від координат  $x, y, z$  деякої точки просторової кривої від довжини дуги  $s$ . Їх можна записати у вигляді:

$$z_1 = \frac{dx}{ds}; \quad z_2 = \frac{dy}{ds}; \quad z_3 = \frac{dz}{ds}. \quad (2.7)$$

З першого рівняння системи (2.6) будемо мати:

$$\frac{dz_1}{ds} = kz_4;$$

$$\frac{dz_2}{ds} = kz_5;$$

$$\frac{dz_3}{ds} = kz_6,$$

з другого рівняння:

$$\frac{dz_4}{ds} = -kz_1 + \tau z_7;$$

$$\frac{dz_5}{ds} = -kz_2 + \tau z_8;$$

$$\frac{dz_6}{ds} = -kz_3 + \tau z_9,$$

нарешті, з третього рівняння цієї системи можна записати:

$$\frac{dz_7}{ds} = -\tau z_4;$$

$$\frac{dz_8}{ds} = -\tau z_5;$$

$$\frac{dz_9}{ds} = -\tau z_6.$$

Отже, маємо систему із дев'яти звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

До цих рівнянь додається десяте рівняння, яке має вигляд

$$z_{10} = s,$$

а також три рівняння (2.7).

Повна система, яка описує криву просторової форми, складається з тринадцяти рівнянь. Для її числового розв'язання застосовано метод Рунге-Кутта четвертого порядку, який було удосконалено Ральстоном [89] та доповнено предіктор-коректор методом, в свою чергу, модифікованим Хеммінгсом.

Програма, що реалізує цей метод, є високоефективною і швидкозбіжною, адаптованою до розв'язання будь-якої кількості та складності звичайних диференціальних рівнянь. У результаті роботи цієї програми визначаються ортогональні координати  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точок кривої, що моделюється.

Нижня й верхня границі інтервалу інтегрування, вихідне значення

приросту незалежної величини та максимальна похибка виконання розрахунків задаються з вихідними даними.

До цієї програми додається підпрограма розрахунку правих частин похідних рівнянь Френе.

Інтегрування формул Френе можна виконати за умови, що відомі деякі графіки залежності кривини та скруту просторової кривої від довжини її дуги. Візьмемо їх у вигляді кусково-лінійних залежностей, приклади яких наведені на рис. 2.10.

У підпрограмі визначення правих частин похідних використовуються кусково-лінійні залежності кривини і скруту від довжини дуги. Параметри  $S_2$  і  $S_3$  відповідають значенням довжини дуги, де відбувається злам епюр кривини і скруту. Максимальні значення кривини  $k$  і скруту  $\tau$  на цих епюрах позначені літерами  $\varphi$  і  $\psi$ .

На підставі запропонованого методу геометричного моделювання просторових кривих розроблено програму розрахунків і візуалізації на екрані монітора комп'ютера отриманих результатів. Графічні дані формувалися цією програмою таким чином, щоб вони у підсумку відповідали прийнятому в нарисній геометрії методу побудови трикартинних комплексних креслень. Передбачається, що крива, яка моделюється, починається з точки з нульовими координатами.

Деякі отримані із застосуванням розробленої програми результати моделювання просторових кривих показані на рис. 2.11. Вони мають ілюстративний характер і демонструють можливості запропонованого методу моделювання просторових кривих на базі формул Френе і кусково-лінійних залежностей зміни кривини та скруту від довжини дуги.

Для остаточного встановлення працездатності розробленого методу геометричного моделювання просторових кривих були проведені розрахунки, пов'язані з побудовою кола та гвинтової лінії.

На рис. 2.12 показано комплексне креслення кола, отриманого із застосуванням розробленої програми. По трьох довільних точках змодельованої кривої побудовано трикутник, навколо якого описане коло. Як випливає з розгляду цього рисунка, всі розрахункові точки отриманої кривої

повністю збігаються з колом, описаним навколо трикутника.

На рис. 2.13 наведені три ортогональні проекції змодельованої гвинтової лінії – геліси, а праворуч показано її прямокутну ізометричну проекцію. Коло, зображене на цьому рисунку, є вторинною проекцією гвинтової лінії.

Зрозуміло, що при моделюванні цих кривих кривина була величиною сталою, а для гвинтової лінії додатково сталою величиною був скрут.

Графічні результати, представлені на рис. 2.12 і 2.13, є додатковим свідченням того, що запропонований метод моделювання кривих дозволяє отримувати плоскі криві, які будуються за умови, що скрут дорівнює нулю. Згідно з теоретичними міркуваннями при наданні кривині кривої нульового значення, а скруту величини, що відрізняється від нуля, слід очікувати як результат розрахунків пряму лінію. Візуалізація результатів розрахунків за цих даних по кривині і скруту показана на рис. 2.14. На цьому рисунку зображена пряма лінія, що ще раз підтверджує працездатність розробленого методу моделювання кривих ліній.

Отже, запропонований метод геометричного моделювання просторових кривих ліній, який базується на застосуванні рівнянь Френе і кусково-лінійних графіків залежностей кривини і скруту, продемонстрував можливість моделювання кривих у широкому діапазоні варіювання тих параметрів, які визначають форму кусково-лінійних графіків кривини та скруту.

## **2.5 Моделювання спіральних кривих**

Спіральні криві знайшли широке застосування в техніці. Спіралями Корню, які відомі також, як клотоїди, описуються профілі лопаток турбін і компресорів, робочі органи спіральних компресорів, шпангоути та ватерлінії теоретичних креслень суден, ділянки залізничних і автомобільних доріг тощо. Клотоїди приваблюють фахівців тим, що їх кривина від довжини дуги залежить прямопропорційно.

Спіралі Корню – це плоскі криві, але в деяких практичних застосуваннях бажано мати просторові криві, наприклад, при проектуванні автомобільних і залізничних доріг на ділянках з плавним поворотом шляху та

одночасним його підйомом або спуском. Існують інші галузі техніки, де необхідно моделювати різноманітні спіральні криві у тому числі й просторові. Так, останніми роками набули поширення спіральні компресори. Вони застосовуються в агрегатах наддування двигунів внутрішнього згоряння, системах кондиціонування повітря, холодильній техніці тощо. Важливим питанням у створенні спіральних компресорів є моделювання робочих органів, які описуються спіралями.

Геометричному моделюванню різноманітних спіралей та їх дослідженню присвячено достатньо публікацій. У більшості цих робіт розглядаються плоскі спіралі, хоча можна знайти публікації, автори яких приділяли увагу просторовим натуральним спіралям, що зустрічаються в природі. Для надання спіралі просторовості треба додатково розглядати її скрут.

У попередньому підрозділі при моделюванні кривих розглядалися кусково-лінійні залежності кривини і скруту від довжини дуги. Для побудови спіралей необхідно, щоб кривина кривої прямопропорційно залежала від довжини дуги:

$$k = as, \quad (2.8)$$

де  $a$  – деякий коефіцієнт пропорційності.

Нижче наведені приклади моделювання спіралей, які візуалізовувалися із застосуванням розробленої вище програми розрахунків, в якій замість кусково-лінійного закону розподілу кривини застосовувалася прямопропорційна залежність (2.8). У цих прикладах побудови спіралей скрут спочатку задавався нульовим, що призводило до плоских спіралей, потім йому надавалося стале значення, і на завершення побудовано спіраль зі скрутом, який прямопропорційно залежав від довжини дуги.

На рис. 2.15 наведено приклад плоскої спіралі, побудованої з нульовим значенням скруту. Кривина залежала від довжини дуги за залежністю (2.3), в якій коефіцієнт  $a$  підбирався таким чином, щоб екранне вікно по осях координат  $x$  і  $y$  обмежувалося значеннями  $\pm 0,5$ . На цьому рисунку показана гілка спіралі з додатними значеннями координат. За необхідності можна побудувати гілку спіралі з від'ємними значеннями координат.

На рис. 2.16 продемонстровано вплив скруту на геометрію спіралі.

Спіраль будувалася зі сталим значенням цієї диференціальної характеристики. За цих обставин можна бачити проекції кривих у фронтальній і профільній площинах проекцій. Для більшої наочності було побудовано аксонометричну проекцію цієї просторової спіралі (рис. 2.17). На цьому рисунку показано як первинну, так і вторинну проекції просторової кривої. Слід відзначити, що звичайні рівняння клотоїди записуються для координат  $x$  і  $y$  і дозволяють будувати плоску криву.

На рис. 2.18 і 2.19 представлені епюр і аксонометрична проекція просторової спіралі, побудованої за умови, що скрут змінювався прямопропорційно довжині дуги, тобто  $\tau = bs$ .

## **2.6 Побудова просторових кривих, які проходять через задані точки простору**

Вище висловлювалися думки щодо необхідності розробки заходів, пов'язаних із забезпеченням проходження кривих, що моделюються, через задані початкову і кінцеву точки площини або простору. Оскільки перенесенням координатної системи завжди можна перейти до нульових значень координат початкової або вихідної точки, то фактично задача проведення кривої, що моделюється, зводиться до її проведення з початкової точки, яка збігається з початком координат, до деякої точки площини, якщо будуватиметься плоска крива, або до деякої точки простору для просторової кривої.

Мінімізацією відхилення кінцевої точки кривої, змодельованої з коефіцієнтами законів розподілу кривини і скруту від довжини дуги, отриманих у результаті роботи алгоритму мінімізації функції багатьох змінних, можна побудувати потрібну плоску або просторову криву.

Зрозуміло що, аналітично поставлену задачу розв'язати неможливо, тому застосовано числовий метод її вирішення, зокрема метод мінімізації. За цільову функцію з цієї задачі взято відхилення кінцевої точки кривої, що проміжно розраховується, від заданої точки.

Для мінімізації цієї функції, як і у випадку плоских кривих, застосовувався алгоритм Хука–Дживса. Перевагою цього алгоритму є те, що він не передбачає визначення частинних похідних від функції, яка мінімізується.

ся. Загально відомо, що саме частинні похідні при числовому їх знаходженні дуже часто ускладнюють пошук оптимальних параметрів, оскільки їх визначенню притаманні певні коливання і, навіть, похибки.

Алгоритм Хука–Дживса не передбачає наявності обласних обмежень параметрів, що оптимізуються. Це є дуже важливим для розв'язання задач, коли межі варіювання параметрів невідомі.

При розв'язанні задачі мінімізації задається вихідна точка в просторі параметрів, що оптимізуються. Процес розрахунків закінчується, коли кінцева точка проміжної кривої наближається до заданої точки з наперед обумовленою точністю.

За параметри, які застосовувалися при мінімізації відхилення кінцевої точки кривої від заданої для плоского випадку, приймалися довжина дуги  $S_2$  (див. рис. 2.10), де відбувається злам графіку розподілу кривини, та максимальне значення кривини  $k$ . Для просторової кривої додатково визначалися значення довжини дуги  $S_3$ , де має місце злам графіку розподілу скруту, та його максимальне значення  $\tau$ .

Попередні розрахунки показали, що бувають випадки, коли варіюванням указаних вище параметрів неможливо досягти заданої точки. Тому додатково було введено ще один параметр, який в однаковому ступені впливав на модулі векторів  $t$ ,  $n$ ,  $b$ .

На рис. 2.20 для плоского випадку показано, як кінцева точка кривої наближається до заданої точки. Центр невеличкого кола відповідає точці, куди має прийти крива. З розгляду рисунку випливає, що на ньому є гілки кривих, кінцеві точки яких знаходяться на значній відстані від заданої точки. Але поступово алгоритм мінімізації наближає криві до отримання бажаного результату. Видно, що криві наближаються до заданої точки. Загущення проміжних кривих візуально свідчить про те, що цільова функція  $\delta$  наближається до нуля. У цій конкретній задачі його значення дорівнює  $3.865516\text{E-}05$ . Точність розрахунків обумовлювалася величиною  $0,0001$ .

Отримана в результаті розв'язання задачі мінімізації крива показана на рис. 2.21. Для ілюстрації процесу мінімізації було взято довільний варіант, який відповідав від'ємним значенням кривини, тобто розрахунки про-

водилися при значеннях  $\varphi < 0$ .

На рис. 2.22 наведені результати моделювання семи плоских кривих. Задані точки (позначені маленькими колами) знаходяться на дузі кола з кроком  $15^\circ$ . Перша крива збігається з віссю  $x$ . Остання точка сьомої кривої знаходиться на осі  $y$ . Щодо першої кривої можна відмітити, що в дійсності вона є прямою. Відрізняється своїм "характером" п'ята крива. Всі інші криві вписуються в загальну схему розташування.

Отже, проведені розрахункові дослідження підтвердили можливість геометричного моделювання плоских кривих із застосуванням рівнянь Френе, хоча введення в число параметрів, що оптимізуються, коефіцієнта, який впливає на величину дотичного, нормально і бінормального векторів можливо призводить до дещо іншої системи диференціальних рівнянь.

Можливість геометричного моделювання просторових кривих підтверджується графічними даними, наведеними на подальших рисунках. Так, на рис. 2.23 показані результати моделювання семи просторових кривих. Кінцеві точки кривих, як і на попередньому рисунку, розміщалися на дузі кола. Координата  $z$  для всіх кривих була одноковою, що можна бачити на фронтальній і профільній площинах проєкцій.

Із аналізу цих даних випливає, що на відміну від попередніх результатів, перша крива не збігається з віссю абсцис. Це можна бачити на горизонтальній і профільній площинах проєкцій. Розрахунки з інших початкових точок приводили до аналогічного результату.

На рис. 2.24 показані аксонометричні проєкції кривих, ортогональні проєкції яких зображені на рис. 2.23. Ці дані наочно підтверджують, що перша крива не збігається з фронтальною площиною проєкцій. Вторинні проєкції кривих повністю повторюють проєкції кривих на горизонтальній площині.

Для подальшого підтвердження можливості геометричного моделювання просторових кривих були проведені розрахунки, в яких апліката заданої точки поступово збільшувалася. Подібні результати наведені на рис. 2.25 в ортогональних проєкціях і прямокутній ізометрії.

Як впливає з розгляду цього рисунку, характер проходження кри-

вих дещо змінився, хоча вихідні дані були такими ж як і при побудові попередніх рисунків. Змінювалася в бік збільшення тільки апліката заданих точок, яка зростала по мірі відхилення кривих від горизонтальної площини проєкцій.

Отже, метод моделювання кривих, який базується на числовому інтегруванні рівнянь Френе за умови, що кривина і скрут підпорядковуються кусково-лінійним залежностям від довжини власної дуги кривої, поширено на побудову просторових кривих, які проходять через задані початкову і кінцеву точки простору. Наведені графічні дані підтверджують плідність запропонованих ідей до розв'язання поставленої задачі.

### **3 МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ З ВИЗНАЧЕНИМИ ЗАКОНАМИ РОЗПОДІЛУ КРИВИНИ ВЗДОВЖ ГОЛОВНИХ ЇХ НАПРЯМІВ**

#### **3.1 Вимоги, які подаються до поверхонь, методи утворення поверхонь**

Перш ніж розглянути методи геометричного моделювання поверхонь визначимося з вимогами, які впливають з практики їх застосування при описі обводів технологічно складних галузей промисловості, та вимог, обумовлених необхідністю забезпечення таких властивостей поверхонь як:

- неперервність;
- гладкість (неперервність часткових похідних або диференційованість);
- відсутність "вмятин" і "складок", необумовлених характером вихідної інформації.

Ці вимоги в більшості випадків впливають або з умов експлуатації об'єкта, що проектується, це, в першу чергу, стосується аеродинамічних поверхонь, що рухаються в якомусь середовищі, або з естетичних мірку-

вань, наприклад, кузов автомобіля. Треба відмітити, що друга з умов інколи може порушуватися в цілях задоволення вимог "технологічності" модельованої поверхні.

Іншу групу вимог до методів побудови поверхонь визначають умови їх застосування в реальному процесі проектування. Сюди відносяться:

- можливість застосування методу для формування достатньо широкого класу поверхонь, що зустрічаються на практиці;
- застосування в якості вихідної інформації зрозумілої та звичної для користувача;
- можливість легкого і достатньо простого керування формою поверхні (коригування модельованої поверхні має досягатися шляхом зміни значень невеликої кількості параметрів);
- можливість здійснення локальних змін поверхні. Ця умова впливає як із вимог збіжності ітераційного процесу моделювання, так із натурального бажання спростити процес модифікації раніше сформованих поверхонь.

Методи моделювання поверхонь за характером вихідної інформації, що в них застосовується, можуть бути об'єднані в кілька груп.

1. *Аналітичне подання поверхні.* До цієї групи відносяться методи задання поверхонь у вигляді явних  $z = f(x, y)$ , неявних  $F(x, y, z) = 0$  аналітичних залежностей, а також параметричних рівнянь:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v); \\y &= y(u, v); \\z &= z(u, v),\end{aligned}$$

де  $u, v$  – незалежні змінні.

Незважаючи на зовнішню простоту і компактність математичного опису, притаманного аналітичним методам, вони не знайшли широкого застосування в практиці створення технічних об'єктів, що пояснюється обмеженою областю застосування цих методів, певними труднощами опису ділянок кривих і поверхонь з різкою зміною їх форми, обумовленою особливостями об'єктів, що ними подаються. Крім того, аналітичні методи не є гнучкими. Для кожного нового типу поверхні необхідно заново створювати їх аналітичне подання. Дуже складно вносити локальні зміни в геометричний образ (криву чи поверхню), що проектується. Навіть незначні зміни,

які вносяться в геометричний образ, вимагають суттєвої зміни його опису.

2. *Кінематичний метод подання поверхні.* До цієї групи відносяться методи утворення поверхонь шляхом руху у просторі деякої лінії постійної або змінної форми. Ці методи формоутворення поверхонь відрізняються простотою та наочністю, що призвело до їх широкого застосування в інженерній практиці. Але вони не позбавлені недоліків, які особливо проявляються при проектуванні складних поверхонь за наперед заданими умовами геометричного, технологічного та функціонального характеру. Дискретність задання поверхні ускладнює отримання її математичної моделі у зв'язку із довільністю в заданні ліній каркасу, виборі способів його ущільнення чи при переході до неперервного каркасу [31].

3. *Конструювання поверхонь шляхом нелінійних перетворень простору.* Це група методів, які передбачають отримання шуканої поверхні як образу площини або якоїсь іншої відомої поверхні. Теоретичною основою цих методів є алгебраїчна геометрія. Ними можна конструювати складні технічні поверхні [24, 31, 79, 86]. До цієї групи тяжіють метод миттєвих перетворень, метод виділення поверхні з багатопараметричної множини ліній тощо.

4. *Конструювання поверхонь проєктивним способом.* Цей спосіб в певній мірі є універсальним, він розглядається в проєктивній геометрії і передбачає утворення поверхні як різноманіття точок або ліній, що виходять в результаті перетину відповідних елементів проєктивних множин ліній, площин і поверхонь. На жаль, цей спосіб недостатньо розроблений.

5. *Моделювання поверхонь із заданими законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів.* Цей метод моделювання поверхонь є відносно новим; зараз він інтенсивно розвивається. Варіюючи вихідними даними, коефіцієнтами законів розподілу кривини, можна впливати на форму модельованої ділянки поверхні. В подальших підрозділах цього розділу це питання розглядається більш детально.

Слід відзначити, що значна кількість робіт, де розглядаються питання моделювання поверхонь, орієнтовані саме на побудову ділянок або гілок поверхонь, а не на отримання їх ділянок, які проходять через певні точ-

ки простору, у тому числі із забезпеченням кутів нахилу дотичних в початковій та кінцевих точках.

Разом з тим можна констатувати, що розглянуті вище методи не завжди в повній мірі задовольняють проєктантів, оскільки майже з кожним новим проєктом вимоги, які до них подаються, посилюються. Усе це не дозволяє використовувати так званий метод проєктування виробів "за прототипом", коли новий виріб створюють масштабуванням раніше відпрацьованого об'єкта. Подібний метод поширений у суднобудуванні, газотурбобудуванні та інших галузях промисловості.

Отже, необхідна розробка нових, більш досконалих геометричних моделей для опису поверхонь корпусів суден, лопаток турбін і компресорів, проточних частин гідродинамічних передач і гідротрансформаторів, які базуються на сучасних досягненнях прикладної та обчислювальної геометрії та комп'ютерної графіки. Не в останню чергу доцільність у ретельних підходах до геометричного моделювання означених об'єктів визначають екологічні вимоги.

Якість проєктування виробів технологічно складних галузей промисловості суттєво залежить від методів геометричного моделювання зовнішніх і внутрішніх плоских і просторових обводів складових компонентів цих виробів. Ці методи, по-перше, мають бути достатньо простими та надійними, забезпечувати можливість аналітичного опису обводів, по-друге, давати проєктанту достатню свободу у варіюванні геометрією зовнішніх і внутрішніх поверхонь, надавати можливість вносити локальні зміни до форми обводів та ін., по-третє, дозволяти ефективну алгоритмізацію та реалізацію на комп'ютері.

Щодо комп'ютерної реалізації можна відзначити, що розвиток обчислювальної техніки, і особливо персональних ЕОМ, зумовив їх проникнення у всі галузі науки і техніки. Для "користувачів, що не програмують" розроблені відповідні програмні продукти. Це текстові і графічні редактори, електронні таблиці, засоби візуального програмування тощо. Науковці широко застосовують пакети математичних програм типу MatLab, Mathcad і навіть більш потужні продукти Mathematica, Maple. Проте ці програмні

продукти не дозволяють розв'язувати багато практичних задач тому, що орієнтовані, головним чином, на розв'язання окремих математичних задач стандартними методами. Практичні ж розрахунки, зокрема, пов'язані з геометричним моделюванням складних поверхонь, вимагають творчого і комплексного підходу, що реалізовується тільки в класичному програмуванні.

Зараз важко уявити, щоб можна було створювати різні технічні вироби без використання числових методів. Але вказані числові методи не завжди можна представити у вигляді простих проектувальних методик. Більше того, широке застосування числових методів дещо знизило інтерес до пошуку закінчених аналітичних рішень. У подальших дослідженнях, виконаних у цій роботі, саме числові методи набули широкого поширення при геометричному моделюванні кривих і поверхонь.

Значний обсяг геометричної інформації, яка готується при проектуванні виробів, що мають складну геометричну форму, вимагає розробки високоефективних геометричних моделей з наступною їх реалізацією на ЕОМ, з наданням проектанту можливості не тільки візуально оцінювати отримані результати, але й досліджувати їх диференціальні характеристики, визначати об'єми, площі тощо на екрані монітора комп'ютера.

Застосування сучасної обчислювальної техніки для розв'язання задач геометричного моделювання виробів технологічно складних галузей промисловості сприяє створенню систем автоматизованого проектування (САПР), але це примушує розробляти спеціалізоване програмне забезпечення та є одним з найбільш відповідальних і трудомістких етапів створення САПР.

### **3.2 Моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів**

У попередніх розділах показано, що при моделюванні плоских і просторових кривих ліній можна застосовувати лінійні, квадратичні, кубічні графіки розподілу їх кривини.

Подібні ідеї можна поширити на моделювання поверхонь – повер-

хонь, які матимуть певний закон розподілу кривини вздовж головних їх напрямів.

Важливою є розробка такого методу моделювання ділянки поверхні, який забезпечував би її проходження через певні точки простору. Необхідність моделювання подібних поверхонь дуже часто впливає при розв'язуванні багатьох практичних задач, пов'язаних зі створенням просторових обводів об'єктів.

Розглянемо метод геометричного моделювання поверхонь, кривина яких вздовж головних напрямів підпорядковується лінійним залежностям від довжин дуг, що вимірюються вздовж координатних ліній. Коефіцієнти цих залежностей визначатимуться за умови забезпечення проходження ділянок модельованих поверхонь через задані точки простору та мати в початковій точці задані кути нахилу дотичних до головних напрямів.

Якщо в координатній системі  $u$  і  $v$  відомі координати чотирьох точок, по дві з котрих розташовані на цих осях, а в початку координат задані кути нахилу дотичних, то можна побудувати фрагмент поверхні із застосуванням лінійних законів розподілу кривини вздовж цих осей.

Розглянемо фрагмент деякої поверхні, показаної на рис. 3.1. На цьому рисунку під  $du$  і  $dv$  розуміються диференціали криволінійних координат поверхні, які відповідають нескінченно малому переміщенню по поверхні; кути  $\varphi(u, v)$ ,  $\theta(u, v)$  є кутами нахилу дотичних до головних напрямів поверхні в точці, яку назвемо початковою;  $u$  і  $v$  – криволінійні координати головних напрямів поверхні.

Ортогональні координати  $x$ ,  $y$  і  $z$  довільної точки поверхні функціонально залежать від криволінійних координат  $u$  і  $v$ , тобто:

$$\begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v); \\ z = z(u, v). \end{cases}$$

Коли криволінійні координати  $u$  і  $v$  пробігають область своєї зміни, то довільна точка  $M$  описує деяку поверхню в параметричному її поданні. Кожній парі значень  $u$  і  $v$  із області їх зміни відповідає певна точка поверхні. В загальному випадку криволінійні координати геометричного смислу не

мають і можуть вибиратися різними способами на одній і тій же поверхні.

З розгляду рис. 3.1 випливають наступні співвідношення:

$$dx = \cos \varphi(u, v) du;$$

$$dy = \cos \theta(u, v) dv;$$

$$dz = \sin \varphi(u, v) du + \sin \theta(u, v) dv.$$

Фрагменту поверхні, показаному на рис. 3.1, відповідають певні графіки розподілу кривини  $k_1(u, v)$  і  $k_2(u, v)$ , які залежать від значень криволінійних координат  $u$  і  $v$ .

Відомо [45, 59, 72], що кривина поверхні дорівнює швидкості зміни кутів нахилу дотичних  $\varphi$  та  $\theta$  до головних її напрямів, тобто:

$$\frac{d\varphi}{du} = k_1(u, v);$$

$$\frac{d\theta}{dv} = k_2(u, v).$$

Інтегруючи ці вирази, визначаємо залежності для розрахунку кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні  $u$  і  $v$  в довільній її точці:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + \int_0^u k_1(u, v) du; \quad (3.1)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + \int_0^v k_2(u, v) dv, \quad (3.2)$$

де  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  – кути нахилу дотичних до головних напрямів поверхні в початковій її точці, тобто при нульових значеннях криволінійних координат  $u$  і  $v$ , відповідно.

Параметричне рівняння поверхні матиме вигляд:

$$x(u, v) = x_0 + \int_0^u \cos \varphi(u, v) du; \quad (3.3)$$

$$y(u, v) = y_0 + \int_0^v \cos \theta(u, v) dv; \quad (3.4)$$

$$z(u, v) = z_0 + \int_0^u \sin \varphi(u, v) du + \int_0^v \sin \theta(u, v) dv. \quad (3.5)$$

Розглянемо геометричне моделювання поверхні за умови, що її кривина вздовж криволінійних координат  $u$  і  $v$  буде змінюватися за лінійними

законами [9, 13]:

$$k_1(u, v) = a_1u + b_1v + c_1; \quad (3.6)$$

$$k_2(u, v) = a_2u + b_2v + c_2, \quad (3.7)$$

де  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  – коефіцієнти лінійних розподілів кривини вздовж головних напрямів поверхні, які підлягають визначенню при її геометричному моделюванні.

Для лінійних законів розподілу кривини (3.6) і (3.7) формули (3.1) і (3.2) для обчислення кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні матимуть наступний вигляд:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + u \left( \frac{a_1u}{2} + b_1v + c_1 \right); \quad (3.8)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + v \left( a_2u + \frac{b_2v}{2} + c_2 \right). \quad (3.9)$$

Координати  $x, y$  і  $z$  будь-якої точки поверхні можна розрахувати, якщо якимось чином будуть визначені коефіцієнти  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  законів розподілу кривини.

Зокрема, якщо кривина поверхні в обох головних напрямках поверхні задається одним рівнянням:

$$k(u, v) = au + bv + c,$$

то формули обчислення кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні матимуть такий вигляд:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0(v) + u \left( \frac{au}{2} + bv + c \right);$$

$$\theta(u, v) = \theta_0(u) + v \left( au + \frac{bv}{2} + c \right).$$

Якщо коефіцієнти  $a, b$  і  $c$  відомі, то можна розрахувати координати  $x, y$  і  $z$  поверхні, застосувавши записані вище вирази.

### **3.3 Моделювання ділянок поверхонь із заданими коефіцієнтами законів розподілу кривини**

Розглянемо вплив коефіцієнтів розподілу кривини вздовж головних напрямів поверхні на форму отримуваної при цьому її ділянки. Для спрощення будемо вважати, що закони розподілу кривини вздовж головних напрямів є однаковими.

За вихідні дані прийняті координати початкової точки  $x_0(v)$ ,  $y_0(v)$  і  $z_0$  та кути нахилу дотичних  $\varphi_0(v)$  і  $\theta_0(u)$  до головних напрямних поверхні при нульових значеннях криволінійних координат, а також коефіцієнти  $a$ ,  $b$ ,  $c$  закону розподілу кривини. При моделюванні поверхні криволінійні координати  $u$  і  $v$  змінювалися від 0 до 1, залежності кутів нахилу дотичних до головних напрямних поверхні  $\varphi_0(v)$  і  $\theta_0(u)$  вважалися сталими, а координати початкової точки  $x_0(v)$ ,  $y_0(v)$  змінювалися за лінійним законом.

За результатами обчислень формувався *script*-файл для системи AutoCAD, за допомогою якого візуалізовувалася змодельована поверхня.

На рис. 3.2 – 3.3 наведені результати моделювання поверхонь заданої кривини для різних значень кутів нахилу дотичних до головних напрямів.

Поверхні, показані на рис. 3.2 будувалися за умови, що кут  $\varphi_0$  нахилу дотичної в початковій точці змінювався від  $-20^\circ$  до  $20^\circ$  з кроком  $20^\circ$ , а поверхні, показані на рис. 3.3, – за умови, що в тому ж інтервалі варіювався кут  $\theta_0$  нахилу дотичної також в початковій точці. Як свідчать ці дані, при зростанні в початковій точці кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  скривленість поверхонь зростає. Слід зазначити, що ці параметри, якщо можна так висловитися, "фізичні" і їх вплив на форму поверхні апріорі передбачений – чим більший кут, тим більша кривина поверхні.

На рис. 3.4 – 3.6 показані поверхні, які отримані при варіюванні коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$  рівняння лінійного закону розподілу кривини. Усі ці коефіцієнти варіювалися в інтервалі від  $-1$  до  $1$  з кроком  $1$ . По відношенню до коефіцієнта  $a$ ,  $b$  і  $c$  висновок щодо їх "фізичності" зробити важче. Вплив цих коефіцієнтів менш передбачений. Слід зазначити, що при варіюванні одного із цих коефіцієнтів два інших коефіцієнти мали нульове значення.

На цих рисунках поверхні, які розташовані посередині, є площинами, що є наслідком нульових значень кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ .

### 3.4 Алгоритм побудови поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів

Розв'яжемо задачу визначення невідомих коефіцієнтів лінійних законів розподілу кривини (3.6) і (3.7) для ділянки поверхні, показаної на рис. 3.7. Відомі координати чотирьох точок, а також кути нахилу дотичних  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  вздовж криволінійних координат в початковій (нульовій) точці.

Поставлену задачу моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів будемо розв'язувати за наступним алгоритмом [9].

*Крок 1.* Забезпечення проходження крайки  $0-1$  ділянки поверхні через точку  $1$ . При цьому криволінійна координата  $v$  буде дорівнювати нулю і змінюватися будуть координати  $x$  і  $z$ . Відносно координати  $z$  відмітимо, що при нульовому значенні криволінійної координати  $v$  другий інтеграл при її визначенні згідно формули (3.5) також буде дорівнювати нулю.

Отже, для побудови крайки поверхні, що проходить через точки  $0$  і  $1$ , необхідно знайти значення коефіцієнтів  $a_1$ ,  $c_1$  та відповідну криволінійну координату  $u_1$ . Згідно з (3.6) коефіцієнт  $b_1$  при цих розрахунках не буде задіяним, оскільки криволінійна координата  $v$  дорівнює нулю.

Визначення коефіцієнтів  $a_1$ ,  $c_1$  та криволінійної координати  $u_1$  виконується шляхом мінімізації відхилення деякої проміжної точки, розрахованої при значеннях параметрів  $a_1$ ,  $c_1$ ,  $u_1$ , що оптимізуються, з метою досягнення збігу точки з оптимальними параметрами із заданою точкою  $1$ .

Розв'язування поставленої задачі дещо полегшується оскільки за вихідне значення координати  $u$  приймається величина, що дорівнює довжині відрізка  $0-1$ .

Коефіцієнтам  $a_1$  і  $c_1$  присвоюються довільні значення. Пошук невідомих величин здійснюється шляхом розв'язання задачі мінімізації відхилення проміжно отриманої точки від заданої, тобто від точки  $1$ . На цьому кроці моделювання поверхні також застосовано високоефективний алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком–Дживсом.

*Крок 2.* Забезпечення проходження крайки 0–2 ділянки поверхні через точку 2. У цьому випадку криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю, а будуть варіюватися координати  $y$  і  $z$  поверхні. Координата  $z$  визначатиметься без врахування першого інтеграла (3.5).

Для побудови крайки поверхні, що проходить через точки 0 і 2, необхідно визначити коефіцієнти  $b_2, c_2$  і криволінійну координату  $v_2$ . Згідно з (3.7) коефіцієнт  $a_2$  при цих розрахунках не буде задіяним, оскільки криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю. За перше наближення криволінійної координати  $v_2$  береться відстань між точками 0 і 2.

Надавши коефіцієнтам  $b_2$  і  $c_2$  довільні значення, розв'язують задачу мінімізації функції трьох змінних. Цільовою функцією виступає відстань між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в результаті роботи алгоритму мінімізації функції багатьох змінних.

*Крок 3.* Знаходження значення коефіцієнта  $a_2$ , який має забезпечити проходження проекції крайки 2–3 поверхні через горизонтальну проекцію точки 3. Коефіцієнти  $b_2, c_2$  і криволінійна координата  $v_2$ , які були визначені на другому кроці моделювання поверхні, залишаються незмінними. На цьому кроці мінімізується функція з однією змінною. Цільовою функцією виступає відхилення проекції на горизонтальну площину проекцій проміжної точки, отриманої при роботі алгоритму мінімізації функції, від проекції на цю ж площину точки 3. Отже, на цьому кроці моделювання поверхні задіяні координати  $x$  і  $y$  точок проміжних і заданої точки 3.

*Крок 4.* Знаходження значення коефіцієнта  $b_1$ , який має забезпечити проходження проекції крайки 1–3 поверхні через горизонтальну проекцію точки 3. При цьому залишаються незмінними значення коефіцієнтів  $a_1, c_1$  та криволінійної координати  $u_1$ , які були знайдені на першому кроці моделювання поверхні. На цьому кроці також мінімізується функція з однією змінною. Цільовою функцією виступає та ж сама функція, що й на третьому кроці геометричного моделювання ділянки поверхні.

Таким чином, у результаті числової реалізації наведених чотирьох кроків запропонованого алгоритму геометричного моделювання ділянки поверхні з лінійними законами розподілу кривини у вигляді (3.6) і (3.7)

вздовж головних її напрямів становляться відомими всі коефіцієнти, які необхідні для побудови ділянки поверхні, подібній тій, що показана на рис. 3.7.

На підставі запропонованого алгоритму геометричного моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних її напрямів розроблено відповідний програмний продукт у середовищі Фортран PowerStation, який є сучасною версією потужної алгоритмічної мови, що знайшла широке застосування в наукових дослідженнях. Основними програмними одиницями в цьому продукті є підпрограми числового визначення інтегралів у виразах (3.3) – (3.5) та мінімізації відхилення відстаней проміжно отриманих точок від базових точок  $1 - 3$ .

Цілком слушним є питання відносно координати  $z$  точки  $3$ , яка не приймає участі при моделюванні поверхні. Пояснення цьому факту є наступним. Якщо задані три точки поверхні  $1, 2$  і  $3$ , то відомі дев'ять координат, по три  $x, y$  і  $z$ . У той же час при реалізації описаних вище чотирьох кроків моделювання ділянки поверхні задіяні вісім невідомих: це шість коефіцієнтів  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  законів розподілу кривини та дві криволінійні координати  $u_1$  і  $v_2$ . Тобто у поставленій задачі є надлишкова інформація. Відповіддю на це питання є те, що лінійні закони розподілу кривини поверхні вздовж головних напрямів не можуть забезпечити проходження подібної поверхні через три довільно обрані точки. Поверхня може пройти через дві довільні точки, для третьої точки забезпечується збіг її горизонтальної проекції з горизонтальною проекцією вихідної третьої точки.

На рис. 3.8 наведені аксонометрична проекція ділянки поверхні та її вторинна проекція, отримані із застосуванням розробленої програми. На цьому ж рисунку показані точки, на підставі яких побудовано ділянку поверхні. Точки  $0$  і  $1$  та  $0$  і  $2$  лежать на побудованій поверхні. Відносно точки  $3$  подібного висновку зробити неможливо.

Максимальна похибка, яка була виявлена при проведенні розрахунків з моделювання поверхонь за запропонованим методом, не перевищувала величини  $5 \times 10^{-5}$ . Цей низький рівень похибки повністю задовольняє вимогам, які висуває практика моделювання поверхонь.

Як вище вказувалося, на підставі запропонованого алгоритму геометричного моделювання поверхонь з лінійним розподілом кривини вздовж головних її напрямів розроблено відповідну програму розрахунків. Завдяки цій програмі виконано тестові розрахунки, результатом роботи цієї програми є формування масивів координат точок модельованих поверхонь. Візуалізація цих поверхонь виконувалася в середовищі Wolfram Mathematica. Приклади побудованих ділянок поверхонь наведені на рис. 3.9 – 3.11.

На рис. 3.9 ділянки поверхонь побудовані з нульовими значеннями кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ . Нижня поверхня на цьому рисунку є площиною, що є наслідком того, що точки  $1$  і  $2$  знаходяться на відповідних осьових лініях. Відомо, що площина є окремим випадком поверхні. Тому побудова за запропонованим методом моделювання поверхонь окремого їх випадку у вигляді площини є додатковим підтвердженням працездатності ідей закладених у розглянутий метод моделювання поверхонь.

Дві інші поверхні, що розташовані вище площини, змодельовані з поступовим збільшенням координат  $z$  точок  $1$  і  $2$ . На візуалізованих поверхнях для більшої наочності нанесені сітки, лінії яких відповідають сталим значенням криволінійних координат.

Приклад поверхонь, які моделювалися з додатними значеннями кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  нахилу дотичних до головних їх напрямів в нульовій точці та поступовому збільшенні значення координати  $z$  точок  $1$  і  $2$  показано на рис. 3.10. Кути в нульовій точці  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  збільшувалися від  $30^\circ$  до  $90^\circ$  з кроком, який дорівнював  $30^\circ$ .

Три куполоподібні поверхні показані на рис. 3.11. Вони отримані при варіюванні кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  в початковій точці в інтервалі від  $30^\circ$  до  $80^\circ$  з кроком  $25^\circ$ . При цьому аплікати вихідних точок приймалися рівними нулю.

На рис. 3.9 – 3.10 усі ділянки поверхонь були прив'язані до точки, яка мала нульові значення координат, що досягалося перенесенням початку координат двох вище розташованих поверхонь у відповідну точку нижньої поверхні.

Усі вище розглянуті поверхні моделювалися при варіюванні криволінійних координат  $u$  і  $v$  у межах від  $0$  до  $u_1$  і  $v_2$ , відповідно. Але існує пев-

ний інтерес до побудови поверхні при варіюванні криволінійних координат  $u$  і  $v$  у межах від  $-u_1$  і  $-v_2$  до  $u_1$  і  $v_2$ , тобто щоб отримати поверхню у верхній півплощині простору.

Подібні результати наведені на рис. 3.12. Моделювання поверхонь відбувалося із застосуванням вихідних даних, за якими були отримані ділянки поверхонь, показаних на рис. 3.8. Нижня поверхня, що зображена на рис. 3.12, як і на рис. 3.9, є площиною.

Дві інші (верхні) поверхні мають форму западин, але вони не є поверхнями обертання, оскільки були отримані незалежним моделюванням порцій поверхонь від нульових значень криволінійних координат до їх максимальних за модулем значень, тобто від  $-u_1$  і  $-v_2$  до  $u_1$  і  $v_2$ . При цьому було проведено чотири незалежних визначення координат порцій поверхонь.

Отже, виконані теоретичні й розрахункові дослідження підтвердили можливість геометричного моделювання різноманітних поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів.

### **3.5 Побудова складеної поверхні ділянками з лінійними законами розподілу кривини**

У багатьох практичних застосуваннях у зв'язку зі складністю геометричної форми об'єкта, що моделюється, не вдається його представити однією ділянкою поверхні незалежно від способу математичного опису цієї поверхні [14]. Одним із шляхів розв'язання подібної задачі є подання складеної поверхні об'єкта ділянками поверхонь, які мають стикуватися між собою з найбільшим ступенем гладкості.

Розглянемо можливість формування складеної поверхні ділянками поверхонь з лінійними розподілами їх кривини вздовж головних напрямів, які розглянуті у попередньому підрозділі монографії.

На рис. 3.13 показана вихідна ділянка поверхні, яка була змодельована з кутами  $\varphi_0 = 3^\circ$  і  $\theta_0 = 4^\circ$ . Точка 1 мала координати  $\{3,0; 0,0; 0,5\}$ , точка 2 –  $\{0,0; 4,0; 0,5\}$ , точка 3 –  $\{3,0; 4,0; 0,75\}$ . З розгляду цього рисунку випливає, що апліката точки 3 дещо перевищує те значення, яке було вве-

дено з вихідними даними. Це є наслідком тих причин, які були розглянуті вище в підрозділі 3.4. Слід додати, що на ділянці цієї поверхні відсутня сітка, лінії якої відповідають сталим значенням криволінійних координат. Як буде показано нижче, це надасть можливість простежувати границю стикування ділянок поверхонь.

При побудові ділянки, доданої до вихідної, приймається, що точка  $O$ , яка є початком координат, розташовується в точці  $I$  вихідної ділянки. Що стосується кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ , то вони приймаються рівними тим значенням, які були отримані в точці  $I$  при моделюванні вихідної ділянки.

На рис. 3.14 наведено приклад стикування вихідної ділянки з першою доданою вздовж осі  $x$ . Для доданої ділянки вводилися наступні координати точки  $1$   $\{6,0; 0,0; 2,0\}$ . Координати точки  $2$  приймалися рівними координатам точки  $3$  вихідної ділянки поверхні. Для подальших розрахунків для доданої ділянки вводилися наступні координати точки  $3$   $\{6,0; 4,0; 1,0\}$ . На рис. 3.14 чітко видно лінію, яка розмежовує вихідну і додану ділянки. Розрахунковим шляхом визначалися розбіжності у визначенні координат точок, кутів  $\varphi$  і  $\theta$  вихідної і доданої ділянок. Відхилення точок цих ділянок на лінії їх стикування не перевищувало  $8,56 \times 10^{-5}$  мм, кутів  $\varphi$  –  $1,15 \times 10^{-2}$  градусів і кутів  $\theta$  –  $8,56 \times 10^{-3}$  градусів, що є свідченням достатньо високого рівня узгодженості цих ділянок на лінії їх стикування.

Додану ділянку вздовж осі  $y$  можна побачити на рис. 3.15. У цьому випадку початок координат для доданої вздовж осі  $y$  ділянки перенесено у точку  $2$  вихідної ділянки. Точка  $1$  доданої ділянки збігається з точкою  $3$  вихідної ділянки. Для точки  $2$  доданої ділянки вводилися наступні координати  $\{0,0; 8,0; 1,5\}$ , для точки  $3$  –  $\{3,0; 8,0; 1,0\}$ . Похибка визначення координат і кутів  $\varphi$  і  $\theta$  лінії стикування вихідної ділянки з доданою вздовж осі  $y$  не перевищувала величин, наведених вище.

І, нарешті, на рис. 3.16 показана поверхня, яка складається з трьох ділянок, розміщених вздовж осі  $x$  і двох ділянок – вздовж осі  $y$ . Таким чином, ця складена поверхня формується з шести ділянок, з'єднаних в єдине ціле. Максимальна похибка стикування ділянок не перевищувала  $8,56 \times 10^{-5}$  мм, розбіжність ділянок відносно кута  $\varphi$  дещо зросла, але вона

не перевищувала  $1,27 \times 10^{-2}$  градусів, а кута  $\theta - 1,23 \times 10^{-2}$  градусів.

На рис. 3.17 наведено приклад складеної поверхні, яку умовно названо "бугристою". Її побудовано з тими ж самими координатами вихідних точок, що й у попередньому прикладі. Але на відміну від розглянутих вище рисунків кут  $\varphi$  дорівнював мінус  $30^\circ$ , а кут  $\theta -$  плюс  $45^\circ$ .

Таким чином, практичною комп'ютерною реалізацією доведено, що складену поверхню можна формувати з необхідної кількості ділянок поверхонь, які будуються із застосуванням лінійних законів розподілу кривини вздовж головних їх напрямів. При цьому стикування ділянок поверхонь відбувається з прийнятною для практики точністю як по координатах ліній спряження, так і по кутах нахилу дотичних вздовж криволінійних координат  $u$  і  $v$ . Метод може бути застосованим при моделюванні поверхонь технічних виробів складної геометричної форми.

### **3.6 Моделювання поверхонь із заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів в їх кінцевих точках**

Вище було розглянуто метод моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів і заданими кутами нахилу дотичних в початковій точці. Але при цьому до уваги не приймалося те, щоб у точках  $1$  і  $2$  (див. рис. 3.7) були забезпечені задані кути нахилу дотичних до головних напрямів поверхні.

Розв'яжемо задачу моделювання поверхонь з лінійними законами розподілу їх кривини та заданими кутами нахилу дотичних в  $0$ ,  $1$  і  $2$  точках. В точці  $0$  відомі кути  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ , в точці  $1$  відомий кут  $\varphi_1$ , а в точці  $2 - \theta_2$  (рис. 3.18).

Задачу моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини вздовж головних напрямів і відомими кутами в точках  $1$  і  $2$  будемо розв'язувати за алгоритмом, наведеним в роботі [9].

*Крок 1.* Проведення крайки  $0-1$  ділянки поверхні через точку  $1$ , для якої криволінійна координата  $v$  дорівнює нулю. З виразу (3.8) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^2}{2} + c_1 u_1, \quad (3.10)$$

де  $u_1$  – криволінійна координата, яка відповідає точці 1.

Зв'язок кутів  $\varphi_0$  і  $\varphi_1$  згідно з (3.10) визначає невідомий коефіцієнт  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{2}{u_1^2} (\Delta\varphi - c_1 u_1),$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ .

По відношенню до вище запропонованого в підрозділі 3.4 алгоритму геометричного моделювання поверхні з лінійними законами розподілу кривини кількість невідомих, які підлягають визначенню, завдяки наявності кута  $\varphi_1$ , зменшилась до двох. Це коефіцієнт  $c_1$  закону розподілу кривини та криволінійна координата  $u_1$ . Їх визначення також відбувається шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від точки 1. Для крайки 0–1 варіюватимуться будуть тільки координати  $x$  і  $z$ . При  $v = 0$  визначення координати  $z$  спрощується, оскільки при цьому значенні криволінійної координати  $v$  другий інтеграл у формулі (3.5) дорівнює нулю.

*Крок 2.* Проведення крайки 0–2 ділянки поверхні через точку 2, для якої криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю. З виразу (3.9) випливає, що

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^2}{2} + c_2 v, \quad (3.11)$$

де  $v_2$  – криволінійна координата, яка відповідає точці 2.

Зв'язок кутів  $\theta_0$  і  $\theta_2$  згідно з (3.11) визначає невідомий коефіцієнт  $b_2$ :

$$b_2 = \frac{2}{v_2^2} (\Delta\theta - c_2 v_2),$$

де  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_0$ .

Для побудови крайки 0–2 необхідно визначити коефіцієнт  $c_2$  і криволінійну координату  $v_2$ . При цьому варіюватимуться координати  $y$  і  $z$  поверхні. Координата  $z$  визначатиметься без врахування першого інтеграла виразу (3.5). За початкове наближення криволінійної координати  $v_2$  береться відстань між точками 0 і 2.

Невідомі величини  $c_2$  і  $v_2$  також знаходяться мінімізацією відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в результаті роботи алгоритму мінімізації функції багатьох змінних.

*Крок 3.* Визначення коефіцієнта  $a_2$  за умови забезпечення проходження проекції крайки 2–3 поверхні через горизонтальну проекцію точки 3. На

цьому кроці розглядається функція однієї змінної. При цьому мінімізується відхилення проекції на горизонтальну площину проміжної точки від проекції на цю ж площину точки  $Z$ .

*Крок 4.* Визначення коефіцієнта  $b_1$ , який має забезпечити проходження проекції крайки  $1-3$  поверхні через горизонтальну проекцію точки  $Z$ . На цьому кроці також мінімізується функція однієї змінної. Цільовою функцією виступає та ж сама функція, що й на попередньому кроці моделювання ділянки поверхні.

Отже, реалізація наведених вище чотирьох кроків запропонованого алгоритму геометричного моделювання поверхні, що підпорядковується лінійним законам розподілу кривини вздовж головних її напрямів, дозволяє визначити всі невідомі коефіцієнти, які необхідні для побудови ділянки поверхні з заданими кутами нахилу дотичних в точках  $O$ ,  $1$  і  $Z$ . Приклад отриманої поверхні показано на рис. 3.19.

На рис. 3.20 наведені криві лінії, які обмежують ділянку поверхні, розглянутої на рис. 3.19, тобто є її границями. Лінії, які відповідають меншим сторонам, а також більшим сторонам ділянки поверхні попарно еквідистантні. Треба відзначити, що при побудові кривих уздовж горизонтальної осі відкладалися координати  $x$  і  $y$ , тобто на рис. 3.19 суміщені криві, отримані у фронтальній і профільній площинах проекцій. Маленькі кола, показані на цьому рисунку, відповідають точці  $Z$  (див. рис. 3.7). Розташування цих кіл ще раз підтверджує той факт, що ділянка поверхні, яка побудована із застосуванням лінійних законів розподілу кривини у вигляді (3.6) і (3.7) вздовж головних її напрямів, не досягає цієї точки за причин, обґрунтованих вище у підрозділі 3.4.

Графічні залежностями, які наведені на рис. 3.21 відповідають розподілам кутів нахилу дотичних  $\varphi$  і  $\theta$  до крайок ділянки поверхні, зображеної на рис. 3.19. Криві, показані на цьому рисунку суцільними лініями, подають розподіл кутів уздовж крайок  $0-1$  і  $0-2$ , колами на цих кривих показані розподіли цих кутів вздовж крайок  $2-3$  і  $1-3$ . Таким чином, розподіл кутів вздовж взаємно паралельних крайок ділянки поверхні має однаковий характер, що ще раз підтверджує еквідистантність малих і великих крайок

розглянутої ділянки поверхні.

Проведені розрахунки підтвердили той факт, що для крайок 0–1 і 0–2 розрахункові величини кутів  $\varphi$  і  $\theta$  відповідають їх заданим значенням:  $\varphi_0 = 7^\circ$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$  і  $\theta_0 = 5^\circ$ ,  $\theta_2 = 15^\circ$ .

Певний інтерес подає порівняння результатів моделювання ділянок поверхонь з вихідними даними, що застосовувалися вище, і розрахованими за алгоритмами, запропонованими у цьому підрозділі та підрозділі 3.4. У першу чергу цікавлять криві, які обмежують ділянку, та графіки розподілу кутів  $\varphi$  і  $\theta$  вздовж цих крайок. Подібні розрахунки були виконані, результати побудови кривих крайок ділянки поверхні та графіки розподілу кутів наведені на рис. 3.22. Вони отримані з тими ж вихідними даними, що й результати, розглянуті на рис. 3.20 і 3.21.

Цифрами на рис. 3.22 позначені криві, які відповідають крайкам ділянки поверхні. Лінії з нанесеними на них точками є графіками розподілу вказаних кутів. Вони були отримані в результаті моделювання ділянки поверхні без їх зазначення в кінцевих точках відповідних крайок ділянки. Суцільні лінії відповідають крайкам 0–1 і 0–2, а нанесені на них точки – крайкам 2–3 і 1–3.

Отже, графіки розподілу кутів  $\varphi$  і  $\theta$  для взаємно протилежних крайок ділянки поверхні збігаються. Але ці графіки суттєво відрізняються від тих, що наведені на рис. 3.21. У кінцевих їх точках кути нахилу дотичних мають значення: кут  $\varphi_1 = 21,08^\circ$ , кут  $\theta_2 = 13,95^\circ$ . Вони відрізняються від тих, які були застосовані у якості вихідних даних при побудові графіків, показаних на рис. 3.21. Менші значення цих кутів вплинули на криві крайок ділянки поверхні. Оскільки отримані кути  $\varphi$  і  $\theta$  менші за відповідні їх значення, які вводилися з вихідними даними, то і викривлення кривих менші ніж у кривих, наведених на рис. 3.20.

На рис. 3.23 показані ділянки двох поверхонь, отриманих на підходах, розглянутих у цьому підрозділі і в підрозділі 3.4. При цьому було підібрано такий ракурс, щоб можна було бачити різницю в геометрії крайки 0–1. Саме вздовж координатної осі  $x$  відмічається різниця в кутах  $\varphi_1$  в точці 1. Крайка 0–1 поверхні, змодельованої з урахуванням кутів нахилу до-

тичних в точках 1 і 2, більш вигнута, тому ця ділянка поверхні, якщо можна так висловитися, знаходиться нижче ділянки поверхні, побудованої на положеннях підрозділу 3.4.

Відхилення ділянок поверхонь вздовж крайки 0–2 менше, оскільки і різниця кутів  $\theta_2$  незначна.

Отже, введення до розгляду кутів  $\varphi$  і  $\theta$  в кінцевих точках дозволяє впливати на геометрію модельованої поверхні. Вони є додатковими чинниками впливу, що дозволяє формувати поверхні, які відповідають наперед заданим, умовам.

### **3.7 Моделювання поверхонь з лінійним і нелінійним законами розподілу кривини**

У підрозділі 3.4 розглянуто моделювання ділянок поверхонь з лінійними законами розподілу кривини і показано, що у зв'язку з тим, що кількість змінних у законах розподілу менша кількості рівнянь, які можна скласти за наявності координат точок 1 – 3, то немає ніякої можливості забезпечити проходження змодельованої ділянки поверхні через задану точку 3. Таким чином, закони розподілу кривини у вигляді (3.6) – (3.7) є недостатніми для моделювання ділянки поверхні, яка б проходила через вказані опорні точки.

Для забезпечення проходження ділянки модельованої поверхні через чотири точки простору необхідно до одного із законів розподілу кривини додати компоненту у вигляді добутку криволінійних координат.

Отже, візьмемо закони розподілу кривини вздовж координат  $u$  і  $v$  у наступному вигляді:

$$k_1(u, v) = a_1u + b_1v + c_1uv + d_1; \quad (3.12)$$

$$k_2(u, v) = a_2u + b_2v + c_2, \quad (3.13)$$

де  $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2$  – коефіцієнти нелінійного (другого порядку) розподілу кривини вздовж криволінійної координати  $u$  і лінійного розподілу кривини вздовж криволінійної координати  $v$ , які визначаються в процесі моделювання ділянки поверхні.

У залежностях (3.12) і (3.13) для визначення кривини задіяні сім невідомих коефіцієнтів. До них треба додати також невідомі значення криволінійних координат  $u$  і  $v$ . Таким чином, у випадку, що розглядається, існує дев'ять невідомих величин, які можна визначити за умови, що задані дев'ять ортогональних координат  $x$ ,  $y$  і  $z$  точок 1, 2 і 3, уведених до розгляду в підрозділі 3.4.

Для законів розподілу кривини (3.12) і (3.13) формули (3.1) і (3.2) для обчислення кутів нахилу дотичних до головних напрямів поверхні матимуть наступний вигляд:

$$\varphi(u, v) = \varphi_0 + u \left( \frac{a_1 u}{2} + b_1 v + \frac{c_1}{2} uv + d_1 \right); \quad (3.14)$$

$$\theta(u, v) = \theta_0 + v \left( a_2 u + \frac{b_2 v}{2} + c_2 \right). \quad (3.15)$$

Поставлену задачу моделювання поверхні з нелінійним і лінійним законами розподілу кривини вздовж головних її напрямів будемо розв'язувати за наступним алгоритмом.

*Крок 1.* Забезпечення проходження крайки 0–2 ділянки поверхні через точки 0 і 2 (позначення точок відповідає рис. 3.7), для якої криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю, а варіюватися будуть координати  $y$  і  $z$  поверхні. Як вказувалося вище, координата  $z$  розраховуватиметься без врахування першого інтеграла у виразі (3.5). У цьому випадку для побудови крайки поверхні 0–2 необхідно визначити коефіцієнти  $b_2$ ,  $c_2$ , а також криволінійну координату  $v_2$ . У цих розрахунках коефіцієнту  $a_2$  надається нульове значення. За перше наближення криволінійної координати  $v_2$  береться відстань між точками 0 і 2.

Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнти  $b_2$  і  $c_2$  та величину криволінійної координати  $v_2$ . На цьому кроці також застосовується алгоритм мінімізації функції багатьох змінних, запропонований Хуком–Дживсом.

*Крок 2.* Забезпечення проходження крайки  $0-1$  ділянки поверхні через точку  $1$ , для якої криволінійна координата  $v$  дорівнює нулю і варіюватимуться координати  $x$  і  $z$ . Координата  $z$  буде розраховуватися без врахування другого інтеграла формули (3.5). Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти  $a_1$ ,  $d_1$  та криволінійну координату  $u_1$ . Згідно з (3.12) коефіцієнти  $b_1$  і  $c_1$  при цих розрахунках участі не приймають, оскільки криволінійна координата  $v$  має нульове значення.

Коефіцієнти  $a_1$  і  $d_1$  та криволінійна координата  $u_1$  визначаються шляхом розв'язування задачі мінімізації функції трьох змінних за методом, описаним вище.

У результаті реалізації першого і другого кроків запропонованого алгоритму визначаються шість невідомих величин.

*Крок 3.* Забезпечення проходження поверхні через точку  $3$ . Для цього необхідно визначити решту невідомих коефіцієнтів, тобто  $b_1$ ,  $c_1$  і  $a_2$ . Задача мінімізації розв'язується із застосуванням визначених вище значень криволінійних координат  $u_1$  і  $v_2$ .

На рис. 3.24 наведені результати моделювання поверхні з вихідними даними, які використовувалися при проведенні розрахунків, графічно зображених на рис. 3.8. І якщо на рис. 3.8 ділянка поверхні не проходить через задану точку  $3$ , то на рис. 3.24 чітко видно, що змодельована ділянка поверхні проходить через цю точку. Це є наслідком застосування алгебраїчного (другого степеня) закону розподілу кривини. Додання до розгляду ще одного коефіцієнта призвело до тотожного збігу кількості невідомих з кількістю рівнянь, які можна задіяти для розв'язання поставленої задачі моделювання поверхні.

Слід зазначити, що первинна і вторинна аксонометричні проекції, показані на рис. 3.24, отримані із застосуванням модифікованої програми, розглянутої в підрозділі 3.4.

Більш реалістичні результати з візуалізації поверхонь отримані в середовищі Wolfram Mathematica. На рис. 3.25 показані ділянки трьох поверхонь, змодельованих із застосуванням законів розподілу кривини, до одного з яких додано компоненту  $u$  у вигляді добутку криволінійних коорди-

нат. Це надало можливість провести ділянки поверхонь через чотири точки простору. Точка  $O$  для всіх цих ділянок поверхонь мала нульові координати. Вище відзначалося, що цього можна досягти перенесенням координат.

На рис. 3.26 побудовані три поверхні, які моделювалися з поступовим збільшенням координати  $z$  нульової точки. Отже, всі ці поверхні починалися з різних точок, що додатково підтверджувало можливості розробленої програми моделювання поверхонь.

Треба звернути увагу на зону поверхонь, де розташована точка  $3$  і для якої вводилися наступні значення координати  $z$ : 3,5; 4,0; 4,5. На рис. 3.26 поруч з точкою  $3$  розташована шкала для осі  $z$ . Видно, що саме цим аплікатам відповідають праві кінцеві точки змодельованих ділянок поверхонь.

Це візуально підтверджує той факт, що поставлена задача розв'язана. Вказаний результат отримано завдяки включенню до закону розподілу кривини вздовж однієї із криволінійних координат додаткової компоненти.

Слід також відзначити, що верхня крайка поверхонь (на ділянці між точками  $2$  і  $3$ ) має точку перегину, чого не відбувалося при моделюванні поверхонь з лінійними законами розподілу кривини, розглянутими вище в підрозділі 3.4.

На рис. 3.27 наведені криві, які є крайками змодельованої ділянки поверхні. Маленькі кола на цьому рисунку відповідають точкам  $1-3$ , уведеним до розгляду на рис. 3.7. Для забезпечення можливості порівняння результатів моделювання ділянки поверхні з лінійними законами розподілу кривини і законами їх розподілу, запропонованими в цьому підрозділі, були застосовані ті ж самі вихідні дані, що й при побудові рис. 3.20. З розгляду наведеного рис. 3.27 випливає, що крайки  $1-3$  і  $2-3$  ділянки поверхні проходять через точку  $3$ . Це ще раз підтверджує той факт, що введення до закону розподілу кривини додаткової компоненти дозволило побудувати ділянку поверхні, яка проходить через усі вихідні точки. Треба відзначити, що криві крайок ділянки поверхні не є еквідистантними, як це мало місце на подібних кривих, розглянутих у підрозділі 3.4.

Для прикладу на рис. 3.28 показані графіки розподілу кривини вздовж головних напрямів  $u$  і  $v$  для поверхні, побудованої з вихідними да-

ними, які застосовувалися при отриманні результатів, графічно наведених на рис. 3.14. Для менших і більших сторін ділянки поверхні зображено по три кривих, які розраховувалися з відносними значеннями криволінійних координат 0; 0,5 і 1,0. Ліва вертикальна шкала відповідає меншим крайкам ділянок, права шкала – більшим крайкам. Як впливає з розгляду рис. 3.28, при збільшенні криволінійних координат  $u$  і  $v$  кривина поверхні зростає. При цьому вона вздовж координати  $u$  зростає в більшій мірі, що пояснюється застосуванням розподілу кривини за законом (3.12), в якому по відношенню до лінійної залежності (3.13) додано компонент у вигляді добутку криволінійних координат  $u$  і  $v$ .

Усі вище наведені рисунки моделювалися за умови, що криволінійні координати варіювалися у межах, які за модулем не перевищували значення  $u_1$  і  $v_2$ . Тому цікаво було б подивитися, як буде поширюватися поверхня, якщо хоча б одна з криволінійних координат буде перевищувати значення  $u_1$  або  $v_2$ . Для порівняння на рис. 3.29 і 3.30 наведені ділянки поверхонь, перша з яких будувалася у межах варіювання криволінійних координат від 0 до значень  $u_1$  і  $v_2$ , а друга – у межах: координата  $u$  – від 0 до  $u_1$ , координата  $v$  – від 0 до  $1,5v_2$ . Збільшення діапазону варіювання координати  $v$  на 50 % призвело до зростання координати  $y$  на 25 %. Це є наслідком того, що поверхня при збільшенні координати  $v$  стрімко відхилялася від горизонтальної координатної площини, тобто йшла вгору.

Цікаві результати представлені на рис. 3.31, де показана частина поверхні, яка отримана шляхом відсічення від поверхні, показаної на рис. 3.29, її частини, що знаходилася поза межами циліндричної поверхні, вісь якої була горизонтально-проекціювальною прямою, а центр основи збігався з початком координат.

Цим самим підтверджена можливість побудови ділянки поверхні не тільки з горизонтальною її проекцією у вигляді прямокутника, але й з іншою її формою – зокрема у вигляді чверті кола. Можливі й інші варіанти відсічення поверхні, отриманої із законами розподілу кривини (3.12) – (3.13).

### 3.8 Моделювання поверхонь з нелінійним і лінійним законами розподілу їх кривини та заданими кутами нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках координатних осей

Розглянемо моделювання ділянки поверхні із законами розподілу кривини, взятими у вигляді (3.12) і (3.13), але за умови, що задані кути нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках криволінійних координатних осей. Подібна задача, але з лінійними законами розподілу кривини розв'язана в підрозділі 3.6.

Отже, в точці 0 відомі значення кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ , відповідно, по криволінійних координатах  $u$  і  $v$ . В точці 1 відомий кут  $\varphi_1$ , а в точці 2 – кут  $\theta_2$ .

Задачу моделювання ділянки поверхні з нелінійним і лінійним законами розподілу кривини вздовж напрямів  $u$  і  $v$ , та і відомими кутами нахилу дотичних в точках 1 і 2 розв'яжемо в наступній послідовності.

*Крок 1.* Проведення крайки 0–2 ділянки поверхні через точку 2, для якої криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю. З виразу (3.15) випливає, що

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^2}{2} + c_2 v_2, \quad (3.16)$$

де  $v_2$  – криволінійна координата, яка відповідає точці 2.

Зв'язок кутів  $\theta_0$  і  $\theta_2$  згідно з (3.16) визначає невідомий коефіцієнт  $b_2$ :

$$b_2 = \frac{2}{v_2^2} (\Delta\theta - c_2 v_2),$$

де  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_0$ .

Для побудови крайки 0–2 необхідно визначити коефіцієнт  $c_2$  закону розподілу кривини та криволінійну координату  $v_2$ . Ці невідомі знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від точки 2. Для крайки 0–2 будуть варіюватися координати  $y$  і  $z$ . При  $u = 0$  визначення координати  $z$  спрощується, оскільки при цьому значенні криволінійної координати перший інтеграл у формулі (3.5) дорівнює нулю.

Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою 2 і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнт  $c_2$  та величину криволінійної координати  $v_2$ .

*Крок 2.* Забезпечення проходження крайки 0–1 ділянки поверхні через точку 1, для якої криволінійна координата  $v$  дорівнює нулю і варіюватимуться координати  $x$  і  $z$ . Координата  $z$  буде розраховуватися без врахування другого інтеграла формули (3.5). Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти  $a_1$ ,  $d_1$  та криволінійну координату  $u_1$ . Згідно з (3.12) коефіцієнти  $b_1$  і  $c_1$  в цих розрахунках не задіяні, оскільки криволінійна координата  $v$  має нульове значення.

З виразу (3.14) випливає, що

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^2}{2} + d_1, \quad (3.17)$$

де  $u_1$  – криволінійна координата, яка відповідає точці 1.

Зв'язок кутів  $\varphi_0$  і  $\varphi_1$  згідно з (3.17) дозволяє визначити невідомий коефіцієнт  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{2}{u_1^2} (\Delta\varphi - d_1 u_1),$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ .

Коефіцієнт  $d_1$  та криволінійна координата  $u_1$  знаходяться шляхом розв'язування задачі мінімізації функції двох змінних.

У результаті реалізації першого і другого кроків запропонованого алгоритму стають відомими шість невідомих величин. Залишається визначити невідомі коефіцієнти  $b_1$ ,  $c_1$  і  $a_2$ .

*Крок 3.* Забезпечення проходження ділянки поверхні через точку 3. Для цього необхідно знайти три коефіцієнти  $b_1$ ,  $c_1$  і  $a_2$ , які поки що залишаються невідомими. Задача мінімізації розв'язується із застосуванням алгоритму Хука–Дживса за визначених вище значеннях криволінійних координат  $u_1$  і  $v_2$ .

На рис. 3.32 наведені результати візуалізації змодельованої ділянки поверхні, для якої крайка 0–1 будувалася із застосуванням нелінійного закону зміни кривини (3.12), а крайка 0–2 – з лінійним законом зміни кривини (3.13). Кути  $\varphi_0$  і  $\theta_0$  дорівнювали, відповідно,  $12^\circ$  і  $5^\circ$ , а кути  $\varphi_1$  і  $\theta_2$  приймалися рівними –  $20^\circ$  і  $25^\circ$ . Як випливає з розгляду цього рисунка, крайки 1–3 і 2–3 чітко перетинаються в точці 3, що підтверджує факт проходжен-

ня ділянки поверхні, побудованої із законами розподілу кривини (3.12) і (3.13) та заданими кутами нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках криволінійних координат  $u$  і  $v$ , через чотири точки простору.

Більш реалістично ця ділянка поверхні була отримана у середовищі Wolfram Mathematica (рис. 3.33).

Три ділянки поверхонь, які мають опукло-увігнутий характер, показані на рис. 3.34. При побудові цих ділянок поверхонь змінювалися аплікати базових точок (вони рівномірно збільшувалися), зростав кут  $\varphi_0$  від  $10^\circ$  до  $20^\circ$  з кроком  $5^\circ$ , кут  $\varphi_1$  зменшувався від мінус  $10^\circ$  до мінус  $30^\circ$  з кроком мінус  $10^\circ$ , кут  $\theta_0$  зростав від  $5^\circ$  до  $15^\circ$  з кроком  $5^\circ$ , і, нарешті, кут  $\theta_2$  зростав від  $25^\circ$  до  $55^\circ$  з кроком  $15^\circ$ .

Ділянки поверхонь, які мають так званий "хвилястий" характер, показані на рис. 3.35. Вони побудовані за тих же вихідних даних, що й ділянки поверхонь, які наведені на рис. 3.34, але кутам нахилу дотичних до осі  $u$  в точці  $O$ , тобто кутам  $\varphi_0$  були надані від'ємні значення. Як видно, форма ділянок поверхонь змінилася суттєво. Це ще раз підтверджує той факт, що запропонований метод геометричного моделювання поверхонь з нелінійним і лінійним розподілами кривини є працездатним.

Зміну форми ділянок поверхонь при наданні кутам  $\theta_2$  від'ємних значень показано на рис. 3.36. Якщо ділянки поверхонь, які розташовані ближче до спостерігача, майже не змінилися, то прикінцеві їх частини, порівняно з рис. 3.34, набули суттєво іншу форму.

Ділянки поверхонь, показані на рис. 3.37, змодельовані з додатними значеннями кутів  $\theta_0$ . У цьому випадку частини цих поверхонь, які розташовані ближче до спостерігача свою форму суттєво змінили, чого не відбулося з тими частинами поверхонь, які розташовані далі від спостерігача.

Висновки, щодо достатньо широких можливостей запропонованого методу моделювання ділянок поверхонь, можна зробити із розгляду рис. 3.38, де зображена ділянка поверхні, яка має угнуту форму. Подібного результату було досягнуто завдяки застосуванню від'ємних значень кутів  $\varphi_0$  і  $\theta_0$ , які мали значення:  $\varphi_0 = -70^\circ$  і  $\theta_0 = -40^\circ$ .

На завершення цього розділу треба додати, що всі наведені в ньому

графічні результати мають чисто ілюстративний характер. Метою їх отримання було бажання підтвердити можливість моделювання поверхонь з лінійними і нелінійними законами розподілу кривини вздовж головних їх напрямів і кутами нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках координатних осьових ліній.

На підставі запропонованих методів геометричного моделювання ділянок поверхонь розроблено відповідний програмний продукт, який може бути застосованим при поданні обводів виробів технологічно складних галузей промисловості.

### **3.9 Моделювання поверхонь із заданими кутами нахилу дотичних до головних напрямів в усіх кінцевих точках**

Найбільш складним виявився випадок моделювання ділянки поверхні, коли, окрім координат чотирьох точок, задані також і кути нахилу в них дотичних, причому в обох напрямках криволінійних координат. Схема розташування вихідних даних для цього варіанту моделювання ділянки поверхні показана на рис. 3.39.

Підвищення вимог до модельованої поверхні, пов'язане з введенням додатково до розгляду чотирьох кутів  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\theta_1$  і  $\theta_3$ , потребувало відповідного збільшення коефіцієнтів рівнянь, якими мають описуватися залежності кривини від криволінійних координат  $u$  і  $v$ . Вказані залежності були прийняті у наступному вигляді:

$$k_1 = a_1 u^2 + b_1 v^2 + c_1 u + d_1 v + e_1 uv + f_1;$$

$$k_2 = a_2 u^2 + b_2 v^2 + c_2 u + d_2 v + e_2.$$

Отже, обидві залежності кривини від криволінійних координат є алгебраїчними кривини другого порядку.

Інтегруванням цих залежностей отримаємо вирази, за якими будуть розподілятися кути  $\varphi$  і  $\theta$  вздовж відповідних криволінійних координат:

$$\varphi = \varphi_{02} + \frac{a_1 u^3}{3} + b_1 uv^2 + \frac{c_1 u^2}{2} + d_1 uv + \frac{e_1 u^2 v}{2} + f_1 u;$$

$$\theta = \theta_{01} + a_2 u^2 v + \frac{b_2 v^3}{3} + c_2 uv + \frac{d_2 v^2}{2} + e_2 v,$$

де  $\varphi_{02}$  і  $\theta_{01}$  – кути в початку координат, яке переміщується по відповідній криволінійній координатній лінії та нульовому значенні другої криволінійної координати.

Індексація 02 і 01 при кутах  $\varphi$  і  $\theta$  відповідає крайкам модельованої ділянки поверхні.

Отже, користування записаними вище виразами при розрахунках призводить до суттєвих похибок, бо вони не враховують змінність, наприклад, кута  $\varphi$  при переміщенні вздовж криволінійної координати  $v$ , коли координата  $u$  дорівнює нулю. А саме при цьому переміщенні кут  $\varphi_{02}$  змінюється від  $\varphi_0$  до  $\varphi_2$ . Оскільки характер цієї залежності невідомий, то для забезпечення можливості проведення розрахунків приймемо, що цей кут лінійно залежить від координати  $v$  у вказаних межах.

Таким чином, будемо мати

$$\varphi_{02} = \varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v,$$

де  $\varphi_{02}$  – початкове значення кута  $\varphi$  при  $u = 0$  і варіюванні координати  $v$  від нуля до  $v_2$ ;  $\varphi_0$  і  $\varphi_2$  – задані значення кутів в точках 0 і 2.

Подібні міркування можна зробити відносно кута  $\theta_{01}$ , який при нульовому значенні координати  $v$  і варіюванні координати  $u$  в межах від нуля до  $u_1$  змінюється від  $\theta_0$  до  $\theta_1$ . Отже, можна записати

$$\theta_{01} = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u.$$

З урахуванням цих лінійних залежностей розподіл кутів  $\varphi$  і  $\theta$  по криволінійних координатах буде визначатися виразами:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{a_1 u^3}{3} + b_1 u v^2 + \frac{c_1 u^2}{2} + d_1 u v + \frac{e_1 u^2 v}{2} + f_1 u + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v;$$

$$\theta = \theta_0 + a_2 u^2 v + \frac{b_2 v^3}{3} + c_2 u v + \frac{d_2 v^2}{2} + e_2 v + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u.$$

Визначимо кути  $\varphi_{02}$  і  $\theta_{01}$  в точках 0 – 3.

Точка 0, в якій  $u = 0$ ,  $v = 0$ , маємо  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\theta = \theta_0$ .

Точка 1, в якій  $u = u_1, v = 0$ , маємо  $\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^3}{3} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + e_1 u_1$ .

Звідки випливає, що

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{a_1 u_1^3}{3} + \frac{c_1 u_1^2}{2} + e_1 u_1. \quad (3.18)$$

У цій же точці отримаємо  $\theta = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{u_1} u_1 = \theta_1$ .

Точка 2, в якій  $u = 0, v = v_2$ , маємо  $\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v_2 = \varphi_2$  і

$$\theta_2 = \theta_0 + \frac{b_2 v_2^3}{3} + \frac{d_2 v_2^2}{2} + e_2 v_2.$$

Звідки випливає, що

$$\theta_2 - \theta_0 = \frac{b_2 v_2^3}{3} + \frac{d_2 v_2^2}{2} + e_2 v_2. \quad (3.19)$$

Точка 3, в якій  $u = u_1, v = v_2$ , вираз для кута  $\varphi_3$  набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \varphi_3 = \varphi_0 + \frac{a_1 u_1^3}{3} + b_1 u_1 v_2^2 + \frac{c_1 u_1^2}{2} + d_1 u_1 v_2 + \frac{e_1 u_1^2 v_2}{2} + f_1 u_1 + \\ + \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{v_2} v_2. \end{aligned}$$

З урахуванням (3.18) будемо мати

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0 + b_1 u_1 v_2^2 + d_1 u_1 v_2 + \frac{e_1 u_1^2 v_2}{2}. \quad (3.20)$$

Аналогічні дії відносно кута  $\theta_3$  (з урахуванням (3.19)) призводять до результату:

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0 + a_2 u_1^2 v_2^2 + c_2 u_1 v_2. \quad (3.21)$$

Задача побудови ділянки поверхні зводиться до знаходження 10 коефіцієнтів у виразах, які визначають розподіли кривини вздовж криволінійних координат  $u$  і  $v$  та їх довжин  $u_1$  і  $v_2$ . Як і у вище розглянутому прикладі моделювання поверхні, вона розв'язується за три кроки.

*Крок 1.* Забезпечення проходження крайки 0–1 ділянки поверхні через точку 1, для якої криволінійна координата  $v$  дорівнює нулю і задіяними

будуть координати  $x$  і  $z$ . Координата  $z$  буде розраховуватися без врахування другого інтеграла формули (3.5). Для побудови цієї крайки необхідно визначити коефіцієнти  $a_1$ ,  $c_1$ ,  $e_1$  та криволінійну координату  $u_1$ . Решта коефіцієнтів у побудові крайки  $0-1$  не задіяна, оскільки криволінійна координата  $v$  має нульове значення.

З виразу (3.18) випливає, що

$$a_1 = \frac{3}{u_1^3} \left( \varphi_1 - \varphi_0 - \frac{c_1 u_1^2}{2} - f_1 u_1 \right).$$

Коефіцієнти  $c_1$ ,  $f_1$  і координата  $u_1$  знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжно отриманої точки  $1$  від заданої.

*Крок 2.* Проведення крайки  $0-2$  ділянки поверхні через точку  $2$ , для якої криволінійна координата  $u$  дорівнює нулю. З виразу (3.19) випливає, що

$$b_2 = \frac{3}{v_2^3} \left( \theta_2 - \theta_0 - \frac{d_2 v_2^2}{2} - e_2 v_2 \right).$$

Для побудови крайки  $0-2$  необхідно визначити коефіцієнти  $d_2$ ,  $e_2$  закону розподілу кривини та криволінійну координату  $v_2$ . Ці невідомі знаходяться шляхом мінімізації відхилення проміжної точки від заданої точки  $2$ . Для крайки  $0-2$  будуть задіяні координати  $y$  і  $z$ . При  $u = 0$  визначення координати  $z$  спрощується, оскільки при цьому значенні криволінійної координати перший інтеграл у формулі (3.5) дорівнює нулю.

Розв'язавши задачу мінімізації функції трьох змінних з цільовою функцією у вигляді відстані між точкою  $2$  і деякою проміжною точкою, отриманою в процесі роботи алгоритму мінімізації, визначають коефіцієнт  $d_2$ ,  $e_2$  та величину криволінійної координати  $v_2$ .

*Крок 3.* Забезпечення проходження ділянки поверхні через точку  $3$ . Перш за все знайдемо вирази для обчислення коефіцієнтів  $b_1$  і  $a_2$ . Для їх знаходження скористуємося залежностями (3.20) і (3.21), відповідно. Отже, матимемо:

$$b_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_0}{u_1 v_2^2} - \frac{c_1 u_1}{2 v_2} - \frac{d_1}{u_1};$$

$$a_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1 - \theta_2 + \theta_0}{u_1^2 v_2} - \frac{c_2}{u_2}.$$

Таким чином, для проведення крайок поверхні через точку  $Z$  залишилося знайти два коефіцієнти  $d_1$  і  $c_2$ , описаним вище способом. Задача мінімізації розв'язується із застосуванням алгоритму Хука–Дживса за визначених вище значеннях криволінійних координат  $u_1$  і  $v_2$ .

На рис. 3.40 наведені аксонометричні проекції чотирьох крайок ділянки поверхні тестового прикладу. Як випливає з розгляду цього рисунку, всі крайки точно проходять через точки, які їх обмежують. При цьому всі отримані при розрахунках кути  $\varphi$  і  $\theta$  повністю відповідають їх заданим значенням. Аксонометрична проекція змодельованої ділянки поверхні показана на рис. 3.41

Більш реалістичне зображення аксонометричної проекції змодельованої поверхні наведено на рис. 3.42, яке отримано в середовищі Wolfram Mathematica.

## **4 ЗАСТОСУВАННЯ РОЗРОБЛЕНИХ МЕТОДІВ МОДЕЛЮВАННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ В ТУРБО- ТА СУДНОБУДУВАННІ**

### **4.1 Моделювання профілів лопаток осьових турбін**

Розробка нових проектів газотурбінних двигунів (ГТД) нерозривно пов'язана з розв'язанням значної кількості різнопланових задач, до яких, в першу чергу, відносяться задачі термогазодинамічні, міцнісні, конструктивно-компонувальні, технологічні та багато інших. Комплексне вирішення цих задач сприяє створенню високоефективних ГТД різного цільового призначення в транспортній та промисловій енергетиці.

До числа не менш важливих питань, що вирішуються при розробці проектів ГТД, відносяться ті, які пов'язані з моделюванням лопаткових апаратів, що формують проточні частини цих наукомістких виробів. Забезпечення високих аеродинамічних характеристик проєктованих лопаткових апаратів турбін призводить до необхідності надання їм складної гео-

метричної форми. Тому проєктанти ГТД все більшу увагу приділяють розробці нових більш ефективних методів профілювання як плоских перерізів турбінних лопаток, так і поверхонь, що обмежують течію продуктів згоряння палива з мінімально можливими втратами енергії.

Зараз у практиці створення лопаткових апаратів ГТД широко застосовуються різні аналітичні методи моделювання решіток турбінних профілів [4, 6, 32, 39, 42, 54, 89], які відрізняються між собою, головним чином, математичними залежностями, покладеними в їх основу. У деяких з них використовуються сполучення дуг кіл, еліпсів, парабол, гіперболічних спіралей, лемніскат та інших відомих кривих. У роботі [39] для опису обводів спинки і коритця профілю застосовані еліпси і лемніскати, рівняння яких модифіковані для забезпечення заданих кутів входу і виходу потоку з решітки.

У деяких методах використовуються степеневі поліноми в поєднанні з дугами кіл [4, 6], якими описуються вхідні і вихідні кромки профілів. У роботі [42] профіль лопатки турбіни запропоновано моделювати з використанням методу, названого її авторами "методом домінуючої кривини". Співзвучні ідеї використані в роботах [19, 20], в яких профіль лопатки моделювався із застосуванням лінійного закону розподілу кривизни уздовж дуги обводу, проте рішення задачі здійснювалося в іншому плані. Невідомі коефіцієнти закону розподілу кривизни визначалися числовим рішенням системи нелінійних інтегральних рівнянь, отриманих виходячи з умов забезпечення кутів входу і виходу потоку.

Перспективним слід вважати застосування кривих Безьє для моделювання обводів спинки і коритця профілю турбінної лопатки [54]. Проте, при уявній простоті методу Безьє, аналітичну основу якого складають поліноми Бернштейна, його ефективне використання пов'язане з певними проблемними моментами, зумовленими раціональним розміщенням так званих вузлових точок або, як прийнято їх називати в спеціальній літературі, вершин характеристичної ламаної Безьє, яка в першому наближенні окреслює майбутню плавну криву.

У цій роботі пропонується інший підхід до вирішення задачі моде-

лювання обводів профілю турбінної лопатки, хоча він також базується на використанні деякої залежності кривини кривої від довжини дуги її обводу – спинки чи коритця. При цьому спинка профілю моделюється незалежно від коритця. Вхідна і вихідна кромки профілю описуються дугами кіл.

При моделюванні решітки турбінних профілів використовуються геометричні параметри, зміст яких зрозумілий і не вимагає особливого пояснення (рис. 4.1). Зазначимо, що для моделювання турбінної лопатки застосовуються 13 геометричних параметрів – лінійних і кутових.

Координати центрів кіл вихідної  $O_2$  і вхідної  $O_1$  кромки визначаються, виходячи із їх розташування в обраній системі координат:

$$\begin{aligned}x_{O_2} &= r_2; & y_{O_2} &= r_2 \operatorname{ctg}(\gamma_2/2); \\x_{O_1} &= B - r_1; & y_{O_1} &= [(B - r_2) \cos \beta_y + r_1] / \sin \beta_y.\end{aligned}$$

Координати опорних точок  $C_2, K_2$  і  $C_1, K_1$  знаходяться за виразами:

$$\begin{aligned}x_{C_2} &= r_2 [1 - \cos(\beta_{2r} - \gamma_2/2)]; & y_{C_2} &= y_{O_2} + r_2 \sin(\beta_{2r} - \gamma_2/2); \\x_{K_2} &= r_2 [1 + \cos(\beta_{2r} + \gamma_2/2)]; & y_{K_2} &= y_{O_2} - r_2 \sin(\beta_{2r} + \gamma_2/2); \\x_{C_1} &= x_{O_1} + r_1 \cos(\beta_{1r} - \gamma_1/2); & y_{C_1} &= y_{O_1} + r_1 \sin(\beta_{1r} - \gamma_1/2); \\x_{K_1} &= x_{O_1} - r_1 \cos(\beta_{1r} + \gamma_1/2); & y_{K_1} &= y_{O_1} - r_1 \sin(\beta_{1r} + \gamma_1/2).\end{aligned}$$

Кути нахилу дотичних у цих же точках мають значення:

$$\begin{aligned}\varphi_{C_1} &= \beta_{1r} - (\pi + \gamma_1)/2; & \varphi_{K_1} &= \beta_{1r} - (\pi - \gamma_1)/2; \\ \varphi_{C_2} &= (\pi + \gamma_2)/2 - \beta_{2r}; & \varphi_{K_2} &= (\pi - \gamma_2)/2 - \beta_{2r}.\end{aligned}$$

Координати точки  $C_3$ , яка лежить у горлі міжлопаткового каналу, можна визначити, скориставшись наступними виразами:

$$x_{C_3} = x_{O_2} + (a_{2r} + r_2) \sin \varphi_{C_3}; \quad y_{C_3} = y_{O_2} + t - (a_{2r} + r_2) \cos \varphi_{C_3},$$

де 
$$\varphi_{C_3} = (\pi + \gamma_2)/2 - \beta_{2r} - \delta.$$

На положення точки  $C_3$ , крім інших відомих параметрів, суттєво впливає кут  $\delta$  відгину вихідної кромки. Слід зазначити, що не у всіх опублікованих методах побудови профілів лопаток осьових турбін цей кут є вихідною величиною. Часто при формуванні решітки профілів здійснюється

ся тільки відстеження його значення, яке не повинно перевищувати деякої граничної величини [4].

Точка  $K_3$ , виходячи з умови забезпечення максимальної товщини профілю  $c_m$ , яка визначається колом радіуса  $c_m/2$ , береться діаметрально протилежно точці  $A$  торкання спинки профілю з колом радіуса  $c_m/2$ . При цьому кут нахилу дотичної в точці  $K_3$  приймається рівним куту нахилу дотичної в точці, в якій коло радіуса  $c_m/2$  торкається спинки профілю, тобто в точці  $A$ .

Як впливає з розгляду рис. 4.1, спинку профілю лопатки необхідно провести через точки її дотику з вхідною  $C_1$  і вихідною  $C_2$  кромками, а також точку  $C_3$ , що знаходиться в горлі міжлопаткового каналу.

Моделювання обводу спинки профілю починають з вихідної її ділянки, розташованої між точками  $C_2$  і  $C_3$ . При цьому приймається, що кривина кривої  $k$  цієї ділянки профілю лінійно залежить від довжини дуги обводу  $s$ :

$$k(s) = as + b, \quad (4.1)$$

де  $a$  і  $b$  – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню в процесі моделювання кривої.

Пошук цих коефіцієнтів, а також довжина дуги кривої  $S$  між точками  $C_2$  і  $C_3$  здійснюється аналогічно тому як це розглянуто вище.

Оскільки кути нахилу дотичних в точках  $C_2$  і  $C_3$  відомі, то справедливим є наступний вираз:

$$\varphi_{C_3} = \varphi_{C_2} + \frac{aS^2}{2} + bS.$$

З цього виразу визначається коефіцієнт  $a$

$$a = \frac{2}{S} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - b \right),$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_{C_3} - \varphi_{C_2}$ .

З урахуванням коефіцієнта  $a$  вираз для розподілу кута нахилу дотичної до кривої в залежності від довжини дуги набуде вигляду

$$\varphi(s) = \varphi_{C_2} + \frac{s^2}{S} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - b \right) + bs. \quad (4.2)$$

Підставивши у вирази (1.10) координати точки  $C_3$  та прийнявши до уваги (4.2), отримаємо два рівняння

$$\begin{aligned} x_{C_3} &= x_{C_2} + \int_0^s \cos \left( \varphi_{C_2} + \frac{s^2}{S} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - b \right) + bs \right) ds; \\ y_{C_3} &= y_{C_2} + \int_0^s \sin \left( \varphi_{C_2} + \frac{s^2}{S} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - b \right) + bs \right) ds, \end{aligned}$$

числовим розв'язанням яких визначаємо дві невідомі величини: довжину дуги  $S$  і коефіцієнт  $b$ .

При довільному заданні значень довжини дуги  $S$  і коефіцієнта  $b$  отримаємо координати  $x(s)$  і  $y(s)$  деякої точки, віддаленої від точки  $C_3$  на відстань  $d$ , яка визначається виразом:

$$d = \pm \sqrt{(x(s) - x_{C_3})^2 + (y(s) - y_{C_3})^2}. \quad (4.3)$$

У цьому виразі знак береться в залежності від розташування точки з координатами  $x(s)$  і  $y(s)$  відносно прямої, що з'єднує точки  $C_2$  і  $C_3$ .

Як і у вище розглянутих прикладах моделювання плоских кривих, вираз (4.3) приймається за цільову функції в задачі мінімізації відстані  $d$ .

По завершенні моделювання першої ділянки обводу спинки приступають до побудови другої її частини, розташованої між точками  $C_3$  і  $C_1$ . Відмінною особливістю моделювання цієї частини обводу спинки є те, що розподіл кривизни  $k$  по довжині обводу  $s$  подається параболічною залежністю другого ступеня:

$$k(s) = as^2 + bs + c,$$

в якій невідомі коефіцієнти  $a$ ,  $b$  і  $c$  визначаються в процесі моделювання ділянки спинки профілю.

Стикування двох ділянок обводу спинки в точці  $C_3$  здійснюється за умови рівності координат, кутів нахилу дотичних, тобто похідних, і кривини. При цьому приймається, що в точці  $C_3$  криволінійна координата  $s$  дорівнює нулю. В результаті побудови першої ділянки обводу спинки кривина

кривої в точці  $C_3$  стає величиною відомою, тому коефіцієнту  $c$  надається значення, яке дорівнює кривині кривої в кінцевій точці першої ділянки обводу, тобто  $c = k_{C_3}$ .

Оскільки кути нахилу дотичних в точках  $C_1$  і  $C_3$  відомі, то, подібно тому, як це було зроблено для початкової ділянки обводу, можна записати:

$$\varphi_{C_1} = \varphi_{C_3} + \frac{aS^3}{3} + \frac{bS^2}{2} + k_{C_3}S$$

і знайти вираз для обчислення коефіцієнта  $a$

$$a = \frac{3}{S^2} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - \frac{bS}{2} - k_{C_3} \right).$$

Залежність, що встановлює розподіл кута нахилу дотичної на другій ділянці обводу спинки з урахуванням коефіцієнтів  $a$  і  $c$ , матиме вигляд:

$$\varphi(s) = \varphi_{C_3} + \frac{3s^3}{S^2} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - \frac{bS}{2} - k_{C_3} \right) + \frac{bs^2}{2} + k_{C_3}s,$$

де  $\Delta\varphi = \varphi_{C_1} - \varphi_{C_3}$ .

Підставивши цей вираз до рівняння (1.10), записані стосовно точки  $C_1$ , отримаємо наступні залежності для визначення числовим методом довжини дуги  $S$  і коефіцієнта  $b$  координат точки  $C_1$ :

$$x_{C_1} = x_{C_3} + \int_0^S \cos \left( \varphi_{C_3} + \frac{3s^3}{S^2} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - \frac{bS}{2} - k_{C_3} \right) + \frac{bs^2}{2} + k_{C_3}s \right) ds;$$

$$y_{C_1} = y_{C_3} + \int_0^S \sin \left( \varphi_{C_3} + \frac{3s^3}{S^2} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - \frac{bS}{2} - k_{C_3} \right) + \frac{bs^2}{2} + k_{C_3}s \right) ds.$$

Довжина дуги  $S$  між точками  $C_3$  і  $C_1$ , а також коефіцієнт  $b$  визначаються в результаті розв'язання задачі мінімізації величини відхилення  $d$  отриманої проміжної кінцевої точки обводу від точки  $C_1$ .

Далі числовим методом визначаються координати точки дотику кола радіуса  $c_m/2$  зі спинкою профілю (точка  $A$  на рис. 4.1). Це дозволяє визначити координати точки  $K_3$ , яка розташовується діаметрально протилежно точці  $A$ .

Коритце профілю моделюється аналогічно його спинці. Спочатку будується ділянка  $K_2K_3$ , а потім ділянка  $K_3K_1$ .

На підставі запропонованого методу побудови профілів лопаток осьових турбін розроблена програма розрахунку та візуалізації отриманих результатів на екрані монітора комп'ютера. Для проведення розрахунків задаються 13 геометричних параметрів: відносний крок решітки, її осьова протяжність, кут установки профілю, геометричні кути входу і виходу потоку, кути загострення і радіуси округлення вхідної і вихідної кромки, кут відгину вихідної кромки профілю, відносна величина видалення максимальної товщини профілю від вхідної кромки, відносна величина максимальної товщини профілю і горло міжлопаткового каналу. Якщо при введенні вихідних даних ідентифікатору горла каналу присвоєно нульове значення, то величина горла каналу визначається відповідно до рекомендацій, наведених в сучасній літературі з теорії турбін.

Отже, всі перераховані вище геометричні параметри повністю задовольняють умовам моделювання профілів лопаток осьових турбін. Разом з тим слід зазначити, що при такій кількості незалежних параметрів до вибору їх значень необхідно підходити з особливою ретельністю. В першу чергу, це відноситься до максимальної товщини профілю та величини її віддалення від вхідної кромки. При несприятливому сполученні вихідних даних висока ймовірність отримання неконструктивного профілю.

Нижче, для прикладу, наведені профілі соплових і робочих лопаток, отримані з використанням запропонованого методу моделювання профілів лопаток осьових турбін. Слід підкреслити, що представлені графічні дані носять чисто ілюстративний характер. Результатом роботи програми є формування масивів координат точок, нумерованих від середини вихідної кромки в напрямку спинки профілю. Крім візуалізації профілів на екрані монітора комп'ютера, програма формує так званий *script*-файл, який дозволяє відтворювати профілі в середовищі проектування AutoCAD і здійснювати з ними будь-які необхідні дії, в тому числі, експортувати в текстовий редактор Word або якесь інше середовище.

На рис. 4.2 представлені три профілі, отримані з геометричними параметрами, характерними для лопаток соплових апаратів. Профілі побудовані з однаковими значеннями десяти геометричних параметрів. Варіювався геометричний кут входу потоку в діапазоні  $70^\circ - 110^\circ$  з кроком  $20^\circ$ . При цьому кут установки профілю в міру збільшення геометричного кута входу

потоків зменшувався на два градуси. Плоскі перерізи лопаток моделювалися з геометричним кутом виходу потоку, рівним  $13^\circ$ . Справа на рисунку наведені графіки розподілу кривини обводів спинки і коритця для профілю з геометричним кутом входу потоку, рівним  $90^\circ$ . На цьому рисунку цифрою 1 позначений графік кривини, що відповідає спинці, цифрою 2 – коритцю профілю. На графіках чітко проглядаються ділянки з лінійним і квадратичним законами розподілу кривини кривої від довжини дуги обводу. Вздовж вертикальної осі відкладалося відносне значення довжини дуги обводу.

На рис. 4.3 наведені профілі соплових лопаток, побудовані при варіюванні геометричного кута виходу потоку і куті входу, рівному  $90^\circ$ . У цьому випадку також всі геометричні параметри залишалися незмінними, крім кута установки профілю, який зі збільшенням кута виходу потоку збільшувався на один градус.

Профілі лопатки, характерні для робочих решіток, показані на рис. 4.4. Вони змодельовані зі зміною максимальної товщини профілю. Праворуч від профілів наведені графіки розподілу кривизни для спинки і для коритця (цифрові позначення кривих такі ж, як і на рис. 4.2). Графіки побудовані для профілю з відносною товщиною  $c_m = 0,15$ .

Вплив кута відгину вихідної кромки на форму профілю продемонстровано на рис. 4.5. Цей кут зменшувався від  $11^\circ$  до  $15^\circ$  з кроком  $2^\circ$ . При цьому опуклість обводів спинки і коритця також поступово зменшувалася.

Слід підкреслити, що всі інші геометричні параметри профілів залишалися незмінними.

Практика розрахунків і візуалізації профілів лопаток осьових турбін свідчить про те, що запропонований метод їх моделювання відстежує вплив на форму профілів кожного з перерахованих вище 13 параметрів. Зрозуміло, можна привести достатню кількість малюнків, що підтверджують зроблений вище висновок.

## **4.2 Удосконалений метод моделювання профілів лопаток осьових турбін**

У попередньому підрозділі запропоновано метод моделювання обводів спинки і коритця профілів лопаток осьових турбін, який ґрунтується на

використанні деяких залежностей кривини  $k$  кривої від довжини  $s$  дуги її обводу, що з позицій диференціальної геометрії розглядається як формування кривої в натуральній системі координат. При цьому вихідні ділянки обводів спинки і коритця моделювалися в припущенні, що кривина кривої лінійно залежить від довжини дуги обводу. Вхідні ділянки описувалися кривими, що мають квадратичну залежність кривини. Коефіцієнти законів розподілу кривини визначалися в процесі моделювання кривих.

При профілюванні обводу спинки профілю лопатки відомі координати трьох точок, розташованих на вхідній і вихідній кромках обводів, а також в горлі міжлопаткового каналу. У цих же точках відомі і кути нахилу дотичних, які визначаються кутами входу і виходу потоку, кутами загострення кромки, а для точки в горлі каналу – так званим кутом згину вихідної кромки.

Таким чином, якщо в точках  $T_1$  і  $T_2$  (рис. 4.6) відомі кути нахилу дотичних, то можна записати наступний вираз [18]:

$$\varphi_{T_2} = \varphi_{T_1} + a_1 S_1^2 / 2 + b_1 S_1,$$

У записаному виразі три невідомі величини: коефіцієнти  $a_1$  і  $b_1$ , а також довжина дуги  $S_1$ . Проте з нього можна отримати залежність, що зв'язує коефіцієнт  $a_1$  з двома іншими невідомими:

$$a_1 = \frac{2}{S_1} \left( \frac{\varphi_{T_2} - \varphi_{T_1}}{S_1} - b_1 \right).$$

Маючи координати точок  $T_1$  і  $T_2$  і підставивши їх у параметричні рівняння кривої, одержимо два відсутні рівняння для визначення коефіцієнта  $a_1$  і довжини дуги  $S_2$ . Вирішити ці рівняння аналітичним шляхом неможливо. У роботі застосовано числовий метод рішення, зокрема, метод мінімізації відхилення кінцевої точки, отриманої при деякому поєднанні незалежних змінних, від заданої точки  $T_2$ . Безпосередньо для мінімізації функції цілі використовується алгоритм Хука–Дживса, який дозволяє мінімізувати функцію кількох змінних методом прямого пошуку, що не припускає обчислення похідних функції, що мінімізується.

Друга (вхідна) ділянка обводу профілю, що знаходиться між точками  $T_2$  і  $T_3$ , моделюється з використанням квадратичної залежності кривини від довжини дуги обводу. При цьому передбачається, що кривина вихідної і

вхідної ділянок обводу в точці їх стикування буде рівною, що дозволяє знайти значення коефіцієнта  $c_2$ . Таким чином, задача зводиться до числового знаходження коефіцієнта  $b_2$  і довжини дуги  $S_2$ .

Графічна інформація, наведена на рис. 4.2 – 4.5, наочно демонструє працездатність запропонованого методу моделювання обводів профілів лопаток осьових турбін. Проте більш ретельний підхід свідчить, що стикування ділянок обводів профілів відбувається за другим ступенем гладкості.

Про це свідчать графіки, показані на рис. 4.7, які відповідають розподілу кута  $\varphi$  нахилу дотичної до обводу (крива позначена цифрою 1), кривини  $k$  (крива 2) і похідною  $k'$  від кривини по довжині дуги (крива 3). Довжина дуги взята в відносному вигляді.

Як впливає з розгляду наведених даних, крива розподілу кута нахилу дотичної (крива 1) має задовільний характер, чого не можна сказати про дві інші криві. Крива 2 в точці стикування ділянок має злам, а крива 3 – має розрив.

Для усунення цих небажаних явищ пропонується другу ділянку обводу, що розташована між точками  $T_2$  і  $T_3$ , моделювати з використанням кривої, кривина якої описується кубічної параболою:

$$k_{ex} = a_2 s^3 + b_2 s^2 + c_2 s + d_2.$$

Коефіцієнт  $d_2$  дорівнює значенню кривини кривої в кінцевій точці першої ділянки, а коефіцієнт  $c_2$  – значенню похідної кривини від довжини дуги. Надалі задача вирішується подібним же чином. Результати рішення задачі з тими ж самими вихідними також наведені на рис. 4.6, де в місці розбіжності кривих проглядається деяке потовщення лінії графіку.

Більш зримо розбіжність кривих, отриманих з різними законами розподілу кривини, можна побачити на рис. 4.8, на якому в збільшеному масштабі виділені ділянки двох кривих обводів спинки профілю. Верхня крива відповідає її моделюванню з квадратичним законом розподілу кривини.

Введення додаткових умов щодо рівності похідної кривини кривої від довжини дуги у точці стикування призвело до позитивного ефекту, який візуально можна побачити на рис. 4.9. На кривій залежності кривини від довжин дуги (крива 2) злам відсутній. Позитивний ефект, пов'язаний із застосо-

ваними заходами, також можна побачити на кривій розподілу похідної від кривини (крива 3), на якій усунена її неоднозначність у точці стикування.

Моделювання коритця профілю лопатки турбіни здійснюється аналогічним чином. Деяка відмінність полягає у визначенні точки стикування двох ділянок, за яку приймається точка дотику коритця з колом, вписаним в профіль, і який задає максимальну товщину профілю.

Таким чином, запропоновано удосконалений метод моделювання кривих обводів профілів лопаток турбін, який забезпечує поліпшення графіків розподілу кривини та її похідної по довжині дуги.

### **4.3 Моделювання меридіонального профілю проточної частини багатоступінчастої осьової турбіни**

Розглянемо метод геометричного моделювання меридіонального профілю проточної частини багатоступінчастої осьової газової турбіни. На рис.4.10 наведено приклад меридіонального перерізу турбіни, сформованої трьома ступенями осьового типу. Літерні індекси "з" і "в" відповідають, відповідно, зовнішньому і внутрішньому меридіональним обводам проточної частини. Ці обводи описуються кривими, які мають лінійний характер залежності кривини вздовж дуги обводу. Подібні криві розглянуті вище в першому розділі монографії.

Особливістю моделювання є те, що положення початкових точок перерізу ( $P_{z1}$ ,  $P_{v1}$ ) відомі, а кінцевих точок  $P_{z2}$ ,  $P_{v2}$  – ні. Це є наслідком того, що осьові протяжності соплових  $B_{CAi}$  і робочих  $B_{PAi}$  лопаток є функціями їх висот  $l_{CAi}$  та  $l_{PAi}$  і, отже, на початку розрахунку невідомі. Положення точок  $P_{z2}$ ,  $P_{v2}$  визначається ітераційним шляхом.

На першому кроці ітераційного процесу проводиться газодинамічний розрахунок турбіни у припущенні, що її меридіональні обводи описуються конічними поверхнями з кутами нахилу твірних  $\gamma_z$  і  $\gamma_v$ . Це дає можливість розрахувати висоти лопаток та їх осьові протяжності, і отже, побудувати ескіз меридіонального перерізу проточної частини багатоступінчастої турбіни.

Наступним кроком є побудова криволінійних обводів меридіонального перерізу проточної частини. Ці обводи мають кути нахилу дотичних в початкових і кінцевих точках  $\gamma_{31}$ ,  $\gamma_{B1}$  і  $\gamma_{32}$ ,  $\gamma_{B2}$ , відповідно.

Координати точок зовнішнього меридіонального обводу визначаються за наступними виразами:

$$x_3(s) = x_{P_{31}} + \int_0^s \cos\left(\gamma_{31} + \frac{a_3 s^2}{2} + b_3 s\right) ds;$$

$$r_3(s) = r_{P_{31}} + \int_0^s \sin\left(\gamma_{31} + \frac{a_3 s^2}{2} + b_3 s\right) ds.$$

Оскільки для знаходження координат проміжних точок меридіональних обводів необхідно знати коефіцієнти  $a_3$  і  $b_3$  та довжину дуги  $S_3$ , скористаємося результатами першого розділу для вирішення цього питання. Для знаходження невідомих величин потрібно числовим методом розв'язати наступну систему рівнянь:

$$x_{P_{32}} = x_{P_{31}} + \int_0^{S_3} \cos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\gamma_{31}}{S_3} - a_3 s\right)(S_3 - s) + \gamma_{32} \frac{s}{S_3}\right] ds;$$

$$r_{P_{32}} = r_{P_{31}} + \int_0^{S_3} \sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\gamma_{31}}{S_3} - a_3 s\right)(S_3 - s) + \gamma_{32} \frac{s}{S_3}\right] ds.$$

Невідомий коефіцієнт  $b_3$ , який визначає профіль кривини, можна знайти із застосуванням наступного співвідношення:

$$b_3 = \frac{1}{2} \left[ \frac{2(\gamma_{32} - \gamma_{31})}{S_3} - a_3 S_3 \right].$$

Аналогічно визначаються рівняння та знаходяться невідомі коефіцієнти для внутрішнього меридіонального обводу турбіни.

Для розрахунку течії робочої речовини необхідно на ескізі проточної частини нанести розрахункову сітку, яка утворюється прямими, паралельними радіальному напрямку, та кривими лініями, що збігаються з лініями течії першого наближення. При цьому необхідно, по-перше, нанести сітку на меридіональний переріз проточної частини, а, по-друге, визначити у вузлах сітки кривини ліній. Для розв'язання цього питання застосуємо деформативне перетворення граничних обводів заданої кривини [64].

При цьому приймається лінійний закон зміни вхідного кута  $\gamma_{лт1}$  та координати  $r_{лт1}$  початкової точки лінії току:

$$\begin{aligned}\gamma_{лт1}(\mu) &= (1 - \mu)\gamma_{з1} + \mu\gamma_{в1}; \\ r_{лт1}(\mu) &= (1 - \mu)r_{з1} + \mu r_{в1},\end{aligned}$$

де  $\mu$  – коефіцієнт деформації, який варіюється у межах від 0 до 1.

Осьова координата  $x_{лт1}$  початкової точки лінії току меридіонального перерізу не змінюється.

Закон зміни довжини визначається за два кроки. На першому кроці вибирається лінійний закон зміни довжини і за допомогою методу деформативного перетворення будуються  $m$  кривих. Оскільки координата  $x_{лт1}(\mu)$  кривої на виході повинна дорівнювати  $x_{P_{з1}}$  або  $x_{P_{в1}}$ , то довжину  $S_{лт}(\mu)$  кривої знайдемо, розв'язавши наступне інтегральне рівняння:

$$\int_0^{S_{лт}(\mu)} \cos \left[ \gamma_{лт0}(\mu) + \frac{a_{лт}(\mu)s^2}{2} + b_{лт}(\mu)s \right] ds = x_{P_{з1}} - x_{лт0}(\mu),$$

де  $b_{лт}(\mu) = (1 - \mu)b_з + \mu b_в$ ;

$$a_{лт}(\mu) = \frac{(1 - \mu)a_з S_з + \mu a_в S_в}{S_{лт}(\mu)}.$$

Це рівняння розв'язується числовим методом, зокрема, методом половинного ділення, де за інтервал ізоляції вибирається  $[S_в; S_з]$ .

На другому кроці за отриманими  $m$  значеннями довжини  $S_{лт}(\mu)$  будується сплайн, який приймається за закон зміни довжини.

На рис. 4.11 показані лінії току першого наближення, побудовані із застосуванням методу деформативного перетворення.

Таким чином, розроблено метод геометричного моделювання меридіонального профілю проточної частини багатоступінчастої турбіни, працездатність якого підтверджена отриманими результатами розрахунків.

#### **4.4 Моделювання меридіонального обводу робочого колеса радіально-осьового турбодетандера**

В умовах енергетичної кризи будь-які пропозиції, спрямовані на під-

вищення ефективності використання наявних паливних ресурсів, є своєчасними, маючими надзвичайно важливе значення для економіки країни. Одним із резервів отримання додаткових енергетичних ресурсів є використання потенційної енергії природного газу, який транспортується по газопроводах підвищеного тиску. Цей тиск можна використовувати для отримання електричної енергії застосуванням газотурбодетандерів на газорозподільних пунктах, де тиск газу зменшується до параметрів, обумовлених нормативними документами для мереж газопостачання газу в населених пунктах.

Газотурбодетандер дозволяє не тільки зменшувати тиск природного газу, але й будучи турбомашиною, спрацьовує наявний теплоперепад для приводу електрогенератора. Зрозуміло, що чим вище ефективність проточної частини газотурбодетандеру, тим більше електроенергії можна отримати за тих же самих умов. У конструкціях газотурбодетандерів широко застосовуються радіально-осьові турбіни, ефективність яких суттєво залежить від ступеня аеродинамічної досконалості їх робочих коліс.

Геометричному моделюванню меридіональних обводів робочих коліс радіально-осьових турбодетандерів в літературі приділено недостатньо уваги. Окремі підходи до цього питання висвітлені в роботах [27, 29]. І тільки в роботі [30] подані загальні вимоги до побудови зовнішньої границі меридіонального обводу робочого колеса радіально-осьової турбіни невеликої потужності. У цій же роботі відмічається, що поле швидкостей у робочому колесі залежить від форми меридіонального перерізу та профілів лопаток. Вибираючи відповідну форму лопаток і меридіонального перерізу, можна забезпечити необхідний раціональний закон зміни швидкостей у робочому колесі.

У результаті газодинамічного розрахунку турбодетандера стають відомими розміри його проточної частини, у тому числі робочого колеса, що, зокрема, визначає положення крайніх точок  $P_1$  і  $P_2$  зовнішнього меридіонального перерізу, що моделюється (рис. 4.12). Для побудови цього обводу із конструктивних міркувань задають кути  $\psi_1$  і  $\psi_2$ , які є кутами нахилу дотичних, відповідно, на вході та виході із колеса. Ці кути виступають додатковими умовами для моделювання зовнішнього меридіонального обво-

ду робочого колеса.

Моделювання зовнішньої границі каналу робочого колеса зручно виконувати в прямокутній системі координат  $x, y$ , вісь  $x$  якої проходить через крайні точки  $P_1$  і  $P_2$ . Кути  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  між дотичними до меридіонального обводу у точках  $P_1$  і  $P_2$  і віссю  $x$  дорівнюють:

$$\varphi_1 = \pi/2 - \psi_1 - \beta_0;$$

$$\varphi_2 = \pi + \psi_2 - \beta_0,$$

де

$$\beta_0 = \operatorname{arctg} \frac{R_{P_1} - R_{P_2}}{Z_{P_2} - Z_{P_1}}.$$

Згідно [30] граничними умовами для моделювання кривої меридіонального обводу будуть наступні:

а) при  $x = 0; y = 0; dy/dx = \operatorname{tg}\varphi_1; k = 0;$

б) при  $x = x_m - y = 0; dy/dx = \operatorname{tg}\varphi_2; k = 0.$

Метою цього підрозділу є подальший розвиток методів геометричного моделювання плоских кривих ліній, які мають задовольняти вказаним вище умовам, тобто крива у кінцевих точках має забезпечувати задані кути нахилу дотичних та мати нульові значення кривини. Ці криві пропонується застосовувати при моделюванні меридіональних обводів робочого колеса радіально-осьового типу.

Розглянемо побудову плоскої кривої, яка генерується за умови, що задано залежність розподілу кривини кривої від її довжини у вигляді параболі третього степеня [15]:

$$k = as^3 + bs^2 + cs + d, \quad (4.4)$$

де  $a, b, c, d$  – невідомі коефіцієнти, які знаходяться в процесі побудови бажаної кривої.

Оскільки кривина кривої в початковій і кінцевій точках дорівнює нулю, то коефіцієнт  $d$  також дорівнює нулю.

Із виразу (4.4) знаходимо коефіцієнт  $a$

$$a = -\left(\frac{b}{S} + \frac{c}{S^2}\right).$$

Розподіл кута нахилу дотичної буде визначатися залежністю (1.26),

яка в цьому випадку для кінцевої точки кривої буде мати вигляд:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{aS^4}{4} + \frac{bS^3}{3} + \frac{cS^2}{2}.$$

З отриманого виразу також можна знайти коефіцієнт  $a$

$$a = \frac{4(\varphi_2 - \varphi_1)}{S^4} - \frac{4b}{3S} - \frac{2c}{S^2}.$$

Маючи два вирази для коефіцієнта  $a$ , визначимо коефіцієнт  $b$  і остаточно коефіцієнт  $a$ :

$$a = -\frac{12(\varphi_2 - \varphi_1)}{S^4} + \frac{2c}{S^2};$$

$$b = \frac{12(\varphi_2 - \varphi_1)}{S^3} - \frac{3c}{S}.$$

Таким чином, кількість невідомих для моделювання кривої зменшена до двох, це коефіцієнт  $c$  і довжина дуги кривої  $S$ . Як і вище, ці невідомі будемо знаходити шляхом розв'язання задачі мінімізації, пов'язаної з доведенням кривої до заданої кінцевої точки.

На рис. 4.13 показані три криві, які мають в кінцевих точках нульові значення кривини. Криві побудовані в системі координат  $xu$  (див. рис. 4.12). Вони моделювалися з поступовим збільшенням кута  $\varphi_1$  від  $30^\circ$  до  $50^\circ$  з кроком  $10^\circ$ . Кут  $\varphi_2$  з таким же кроком зменшувався від  $-40^\circ$  до  $-60^\circ$ . В кінцевих точках кривих проведені відрізки прямих, які є дотичними до них.

З метою візуального підтвердження нульових значень кривини в кінцевих точках кривої на рис. 4.14 наведені графіки розподілу кривини в залежності від відносної довжини кривих.

На рис. 4.15 наведено приклад змодельованого меридіонального перерізу робочого колеса радіально-осьового турбодетандера.

Таким чином, запропоновано новий підхід до геометричного моделювання кривих ліній, який застосовано при аналітичному поданні меридіональних границь робочого колеса турбодетандера радіально-осьового типу. Реалізація методу на персональному комп'ютері підтвердила його працездатність.

Метод було поширено на моделювання меридіональних перерізів від-

центрових компресорів і діагональних турбін.

#### 4.5 Профілювання лопатки радіально-осьової турбіни на розгортці циліндричної поверхні зовнішнього радіуса робочого колеса

Профілювання лопаток робочого колеса радіально-осьової турбіни виконується після її термогазодинамічного розрахунку, в результаті якого стають відомими радіус  $R_1$  на вході до робочого колеса, висоти лопаток  $l_1$  та  $l_2$  у вхідному та вихідному перерізах, ширина колеса  $B$ , кількість лопаток  $z_p$ , кут виходу потоку на середньому радіусі вихідного перерізу робочого колеса  $\beta_{2г}$ , а також ряд інших параметрів і характеристик.

Одним із підходів до визначення геометричної форми робочих лопаток є їх профілювання на розгортці циліндричної поверхні радіуса  $R_1$  [30]. Побудову профілю починають з проведення його середньої, так званої скелетної лінії, яка в загальному випадку може складатися з прямолінійної та криволінійної частин (рис. 4.16). Прямолінійна частина  $C_0C_1$ , в свою чергу, може мати різні осьову довжину і кут нахилу  $\chi$  до диску робочого колеса. Кут  $\chi$  у більшості випадків дорівнює  $90^\circ$ , але може й відрізнятись від цього значення.

Лінія  $C_1C_2$  описується кривою у натуральній параметризації та обраними законами розподілу кривини за методом, розглянутим вище у цьому розділі стосовно профілів лопаток осьових турбін. При цьому в системі координат  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ , осі  $\bar{x}$  і  $\bar{y}$  якої проходять відповідно через точки  $C_1$  і  $C_2$ , будується середня лінія профілю лопатки радіально-осьової турбіни.

Координати точок  $C_1$  і  $C_2$  визначаються за наступними залежностями:

$$\begin{aligned}x_{C_1} &= B - \xi l_1; \\y_{C_1} &= \varphi_0 R_1 + \xi l_1 \operatorname{ctg} \chi; \\x_{C_2} &= 0; \quad y_{C_2} = 0; \\ \varphi_0 &= 2\pi/z_p + \Delta,\end{aligned}$$

де  $\xi$  – відносна довжина прямолінійної частини  $C_0C_1$  середньої лінії;  
 $\Delta$  – кутове перекриття лопаток на виході;

$z_p$  – кількість лопаток.

Середня лінія має пройти через точку  $C_3$  з координатами:

$$x_{C_3} = d \sin \beta_{C_3}; \quad y_{C_3} = \varphi_0 R_1 - d \cos \beta_{C_3},$$

і мати в ній кут нахилу дотичної, який дорівнює

$$\beta_{C_3} = \pi/2 - \beta_{2\Gamma} - \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – кут відгину вихідної кромки.

Для отримання тілесного профілю задаються товщиною вхідної  $\delta_1$  і вихідної  $\delta_2$  кромок лопатки, а також законом зміни товщини профілю вздовж середньої лінії, яка використовується як геометричне місце центрів кіл радіуса  $r$ , який дорівнює половині товщини профілю  $\delta$ .

Оскільки опукла та угнута частини профілю лопатки радіально-осьового колеса мають обводи близькі за характером до обводу середньої лінії, то можна обмежитися квадратичним законом зміни товщини профілю. При цьому в абсолютному вигляді задається тільки товщина лопатки на вході до колеса  $\delta_1$ , а в усіх інших перерізах товщина профілю визначається множенням  $\delta_1$  на деякий відносний коефіцієнт, що залежить від осьової координати. Вираз для знаходження відносної товщини має вигляд:

$$\bar{\delta}_i = MB_i^2 + NB_i + 1,$$

де

$$M = \frac{\bar{\delta}_9 - 9(\bar{\delta}_2 - 1) - 1}{B^2 9(9 - 1)}; \quad N = \frac{\bar{\delta}_9 - 9^2(\bar{\delta}_2 - 1) - 1}{B 9(1 - 9)}; \quad \bar{\delta}_2 = \frac{\delta_2}{\delta_1}.$$

Тут  $\bar{\delta}_9$  – відносна товщина профілю на відстані  $9B$  від початку координат. Величини  $\bar{\delta}_9$ ,  $9$ ,  $\bar{\delta}_2$  задаються з вихідними даними на моделювання робочого колеса.

Координати угнутої та опуклої частин профілю визначаються з використанням рівнянь обвідних сім'ї кіл радіуса  $r$  з центрами, розташованими на середній лінії:

$$\left. \begin{aligned} f(y, z, s) &= (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2 = 0 \\ f'(y, z, s) &= -2(y - y_0)y'_0 - 2(z - z_0)z'_0 - 2rr' = 0 \end{aligned} \right\}$$

де  $y_0, z_0$  – координати середньої лінії профілю лопатки;  $s$  – параметр.

Профіль лопатки, побудований на розгортці зовнішнього радіуса робочого колеса, показано на рис. 4.17.

Вихідний спрямний апарат, тобто частина робочої лопатки, що відгинається, утворюється обкаткою профілю, побудованого на циліндричній поверхні зовнішнього радіуса  $R_1$  робочого колеса, прямолінійними твірними. При цьому утворюються лінійчаті поверхні, визначниками яких є опукла та угнута частини профілю та дві прямі, що паралельні осі обертання колеса і проходять через точки  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  (рис. 4.18).

Перерізи лопатки площинами, перпендикулярними до осі обертання колеса, мають вигляд рівнобічних трапецій, бічні сторони яких нахилені одна до одної під деяким кутом  $\gamma$ .

Кути  $\gamma_1$  і  $\gamma_2$  на вході і виході з колеса, як і товщини профілю  $\delta_1$  і  $\delta_2$  задають, виходячи з міцнісних, технологічних та конструктивних міркувань.

Розв'язанням рівнянь прямих, які проходять через точки 1–4 та центри  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , визначають координати  $u_{\Pi_1}, z_{\Pi_1}$  і  $u_{\Pi_2}, z_{\Pi_2}$  центрів обертання проєкцій лінійчатих твірних поверхонь нагнітання і всмоктування лопатки.

Знаючи координати точок  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$ , а також, зважаючи на лінійчатий характер поверхонь всмоктування і нагнітання лопатки, знаходять координати профілю в будь-якому перерізі колеса. Положення  $i$ -ї проміжної точки скелетної поверхні визначається координатами  $x_i, z_i$  меридіонального перерізу колеса. Для цього за заданим значенням  $z_i$  обчислюються координати  $u_{\text{сер}}$  і  $z_{\text{сер}}$  середньої лінії периферійного перерізу, побудованого на розгортці циліндричної поверхні зовнішнього радіуса  $R_1$ .

Різниця координат  $z_i$  опуклої та угнутої частин профілю відповідає товщині лопатки  $\delta_{iu}$ , що вимірюється в коловому напрямі на циліндричній поверхні радіуса  $R_1$ . Для розрахунку товщини профілю на поверхні довільного радіуса  $R_i$  необхідно спочатку знайти координати точок  $T_1$  і  $T_2$ , а потім обчислити кут  $\gamma_i$ .

Товщина профілю в циліндричному перерізі  $R_i$  дорівнює:

$$\delta_{R_i} = \delta_{iu} + 2(R_2 - R_i) \operatorname{tg}(\gamma_i/2).$$

На підставі запропонованого методу розроблено програмний код, який формує об'ємну модель робочого колеса у вигляді *script*-файлу для подальшої візуалізації в середовищі AutoCAD.

Метод поширено на моделювання робочих коліс діагональних турбін, в яких рух течії робочої речовини на вході до колеса відбувається під деяким кутом нахилу до диску колеса, відмінним від  $90^\circ$ . У зв'язку з цим вхідні кромки лопаток мають розташування не паралельне осі обертання колеса. Просторове зображення подібного колеса показано на рис. 4.19.

Маючи об'ємну модель робочого колеса, можна побудувати будь-яке плоске його зображення. Зокрема, на рис. 4.20 показані головний вигляд і вигляд зліва. Ці два вигляди були побудовані незалежно один від одного, а потім об'єднані в один рисунок.

#### **4.6 Моделювання корабельних кривих з квадратичним законом розподілу кривини**

Процес удосконалення корпусів суден постійно супроводжується пошуком нових математичних методів моделювання їх зовнішньої форми, особливо підводної частини. Відомо, що зовнішня обшивка корпусу судна описується поверхнею складної геометричної форми. Для її наочного уявлення при проектуванні судна будується так зване теоретичне креслення, на якому корпус судна зображується в трьох взаємопов'язаних проекціях на ортогональній сітці. Перетини поверхні трьома системами ортогональних площин визначають на кресленні сукупність ліній, які називають шпангоутами, ватерлініями і батоксами. Однією з важких і складних проектних робіт є узгодження всіх цих ліній на трьох проекціях теоретичного креслення.

Отже, теоретичне креслення корпусу судна формується трьома сім'ями кривих ліній: шпангоутів, ватерліній і батоксів. У практиці суднобудування ці лінії отримали назву корабельних кривих.

Застосування ЕОМ для розв'язання задач створення нових типів суден вимагає перегляду традиційних методів їх проектування. Процес створення обводів судна починається з визначення головних розмірів і коефіціє-

ентів повноти та підбору відповідного прототипу, зрозуміло, якщо такий існує. Розробка проектів принципово нових типів суден, наприклад, газозовів, суден для перевезення автотранспортних засобів тощо, вимагає застосування нових підходів до побудови корабельних кривих.

На початковій стадії проектування обводи корпусу судна задаються у вигляді деякої характерної поверхні, яка на наступних стадіях проектування піддається певним змінам, обумовленим конструктивними й технологічними доопрацюваннями корпусу судна в процесі його проектування.

Зараз існує ряд методів аналітичного подання теоретичного креслення, придатних для опису поверхонь корпусу судна [5, 25, 26, 35, 43, 57]. В суднобудуванні застосовуються як давно відомі методи опису корабельних кривих [75, 95], так і розвиваються нові підходи до їх моделювання [35].

Засновником теорії проектування суден вважається Фредерік-Хенрік Чапман (1721 – 1808 рр.) – шведський корабельний інженер, вчений, віце-адмірал, автор багатьох праць з проектування суден і суднобудування, член Стокгольмської академії наук [75].

У царській Росії за ініціативою командувача Чорноморського флоту адмірала О. С. Грейга формулу Чапмана застосовували в першій половині 19 ст. при проектуванні чорноморських кораблів, які будувалися на верфях Миколаєва.

Аналіз літературних джерел показав, що при моделюванні плоских і просторових кривих ліній широко застосовуються лінійні, квадратичні, кубічні графіки розподілу кривини від довжини дуги [65, 69].

Корабельні криві будемо будувати в прямокутній системі координат  $Oxy$  (рис. 4.21). На цьому рисунку літерою  $\psi$  позначено кут загострення корабельної кривої, літерою  $G$  – область, обмежену корабельною кривою та осями координат. Розміри  $B$  і  $L$  відповідають півширині та півдовжині корпусу судна.

Площа фігури  $G$ , обмеженої графіком кривої та координатними осями, суттєво залежить від форми корабельної кривої. У суднобудуванні прийнято застосовувати коефіцієнт  $\alpha$ , який називають коефіцієнтом повноти. Цей коефіцієнт визначається як відношення площі фігури, обмеженої

графіком функції та координатними осями, до площі обмежуючого прямокутника.

Для геометричного моделювання корабельних кривих застосуємо рівняння залежності кривини модельованої кривої від довжини її дуги у вигляді поліному другого степеня (1.13). Інтегруванням цієї залежності визначають розподіл кута нахилу дотичної до модельованої кривої у вигляді (1.14). Записавши цей вираз до кінцевої точки модельованої корабельної кривої, для якої відомі початковий і кінцевий кути нахилу дотичної (в початковій точці  $M$  цей кут дорівнює нулю градусів, а в кінцевій точці  $N$  – куту загострення  $\psi$ ), матимемо можливість знайти вираз для невідомого коефіцієнта  $a$ :

$$a = \frac{3}{S^2} \left( \frac{\Delta\varphi}{S} - \frac{bs}{2} - c \right),$$

де  $\Delta\varphi = \varphi(S) - \varphi(0)$ ;  $S$  – довжина дуги корабельної кривої.

Завдяки цим діям кількість невідомих величин зведена до трьох. Коефіцієнти  $b$  і  $c$  та довжину дуги  $S$  визначають шляхом розв'язання задачі мінімізації відхилення в процесі пошуку проміжно отриманої кінцевої точки від заданої точки  $N$  (див. рис. 4.21), в якій за функцію цілі можна було б взяти наступну залежність

$$f = \sqrt{(x_N - x_{N'})^2 + (y_N - y_{N'})^2},$$

де  $N'$  – проміжно отримана кінцева точка ватерлінії.

Зазначимо, що в практиці моделювання корабельних кривих, крім кута загострення кривої  $\psi$ , задають також коефіцієнт  $\alpha$ , тобто коефіцієнт повноти модельованої кривої.

З урахуванням цих обставин цільову функцію треба взяти у наступному вигляді

$$f = \sqrt{(x_N - x_{N'})^2 + (y_N - y_{N'})^2} + \xi(\alpha - \alpha')^2. \quad (4.5)$$

У цьому виразі  $\alpha'$  – проміжно отриманий коефіцієнт повноти,  $\xi$  – деякий експериментальний коефіцієнт.

Для мінімізації функції цілі застосовано високоефективний алго-

ритм, запропонований Хуком–Дживсом. Варійованими параметрами в задачі мінімізації виступають коефіцієнти  $b$  і  $c$  та довжина дуги  $S$ .

На рис. 4.22 наведені результати моделювання трьох корабельних кривих, отриманих за умови варіювання кута загострення  $\psi$  в інтервалі від  $-25^\circ$  до  $-35^\circ$  з кроком  $-5^\circ$  [8]. Коефіцієнт повноти  $\alpha$  дорівнював 0,65.

Вплив коефіцієнта повноти  $\alpha$  на форму корабельних кривих при сталому значенні кута загострення  $\psi = -40^\circ$  продемонстровано на рис. 5.3. Коефіцієнт повноти  $\alpha$  мав значення 0,65 і 0,70.

Відзначимо, що треба дуже зважено підходити до вибору параметрів таких, як коефіцієнт повноти та кут загострення. Виникають певні труднощі при отриманні результатів, коли один із параметрів варіюється.

У той же час, якщо треба змодельовати одну криву (без варіювання параметрів), то результат можна отримати навіть при не дуже вдалому сполученні таких параметрів, як коефіцієнт повноти і кут загострення корабельної кривої.

Так, на рис. 4.24 показана корабельна крива, яка змодельована при достатньо високому значенні коефіцієнта повноти, рівному 0,75, і малому значенні кута загострення, рівному  $-20^\circ$ .

Ті проблеми, які виявляються при моделюванні корабельних кривих за умови варіювання одного з вказаних параметрів, пояснюється чутливістю оптимізаційної задачі до величини коефіцієнта  $\xi$  у формулі (4.5).

Запропонований метод геометричного моделювання корабельних кривих базується на застосуванні параметричних кривих у натуральній параметризації, кривина яких підпорядковується квадратичній залежності від довжини дуги. Проведені розрахунки з візуалізацією отриманих результатів продемонстрували працездатність розробленого методу моделювання корабельних кривих в широкому діапазоні варіювання вихідних даних і забезпеченням заданих кутів загострення кривих і коефіцієнтів повноти.

## **4.2 Аналітичне подання батоксів теоретичного креслення корпусу судна**

При проектуванні судна виконується теоретичне креслення, яке формується трьома сім'ями кривих ліній: шпангоутів, ватерліній і батоксів. Ці лінії, які мають назву корабельних кривих, креслять на попередньо на кресленій сітці теоретичного креслення. Сітка теоретичного креслення виконується при кількості теоретичних шпангоутів, рівній 21. Можлива побудова додаткових шпангоутів, які розташовують на половині прийнятої шпації, як правило, в кінцевостях судна.

Загальна кількість ватерліній може коливатися в залежності від складності обводів корпусу судна від чотирьох до восьми, а кількість батоксів з кожного борта – від двох до чотирьох.

Корабельну криву *батокс* отримують при перерізі поверхні корпусу судна площинами, паралельними діаметральній площині, яка ділить корпус судна на дві симетричні частини – правий і лівий борт.

Проекції теоретичного креслення мають назву бік, півширота та корпус. Криволінійний характер батоксів проявляється на проекції півширота. На дві інші площини проекцій батокси проєкціюються у вигляді відрізків прямих.

Необхідність розгляду поставленого в роботі питання обумовлюється тим, що теоретичне креслення містить 21 шпангоут, а практичних шпангоутів може бути дві і навіть три сотні. Все залежить від довжини корпусу судна і прийнятої шпації (відстані між шпангоутами), яка не перевищує 800 мм. Отже для визначення геометрії практичних шпангоутів необхідно мати аналітичні вирази ватерліній і батоксів.

Як вище відмічалось, питання аналітичного подання корабельних кривих турбує кораблебудівників, починаючи з 18 століття. Але тільки з появою обчислювальної техніки воно набуло особливої важливості та актуальності. Серед публікацій з цього питання можна знайти статті, тези, підручники, посібники, монографії [5, 25, 35, 26, 43, 57]. У цих роботах для опису корабельних кривих застосовуються різні математичні залежності, але найбільшого поширення набули багаточлені різних степенів [5, 35, 43]. У роботах [8 – 10] запропоновано моделювати корабельні криві з використанням параметричних рівнянь у натуральній параметризації та з лінійни-

ми і квадратичними законами розподілу кривини вздовж дуги обводу. Але в цих роботах розглядається геометричне моделювання ватерліній, вони не торкаються шпангоутів і батоксів, які мають деякі особливості. В певній мірі запропоновані у вказаних роботах методи моделювання ватерліній можуть бути віднесені до проектувальних.

У цьому підрозділі пропонується метод аналітичного подання батоксів параметричними кривини у натуральній параметризації із застосуванням лінійних законів розподілу кривини від довжини дуги обводу [10].

Аналітичне подання батоксів виконується за умови, що теоретичне креслення корпусу судна існує, а отже, відомі аплікати точок перетину батоксів з теоретичними шпангоутами.

Для геометричного моделювання батоксів застосуємо рівняння залежності кривини модельованої кривої від довжини її дуги у вигляді лінійної залежності (1.7). Розподіл кута нахилу дотичної визначається виразом (1.8). Параметричні рівняння кривої, що генерується на базі лінійного закону розподілу кривини, мають вигляд (1.9). Як вище вказувалося, скористатися цими залежностями можна за умови, що відомі коефіцієнти  $a$  і  $b$  лінійного закону розподілу кривини та довжина дуги  $S$ . Їх визначення виконується за методом розглянутим вище.

Для того, щоб описати криву із застосуванням лінійного закону розподілу кривини необхідно знати координати початкової і кінцевої точок, а також кути нахилу в них дотичних. Будемо подавати батокси окремими ділянками, розташованими між суміжними шпангоутами, рухаючись від середньої частини судна до носової кінцевості. За цих обставин будуть відомі координати початкової і кінцевої точок, оскільки відомі аплікати точок батоксів, а за наявності шпациї – абсциси точок. Дещо складніше ситуація з кутами нахилу дотичних. На початковій ділянці батоксу кут нахилу дотичної має нульове значення. Це є наслідком того, що днище судна в центральній його частині представляє собою площину.

Кут нахилу дотичної в кінцевій точці початкової ділянки батоксу, де він невідомий, будемо визначати, як кут нахилу прямої, що з'єднує початкову точку ділянки батоксу з точкою батоксу, яка знаходиться наприкінці

наступної його ділянки.

На підставі запропоновано методу геометричного моделювання батоксів розроблено програмний код для проведення розрахунків, пов'язаних з визначенням координат кривих, що подають батокси, та візуалізацією отриманих результатів.

На рис. 4.25 наведені результати геометричного моделювання чотирьох батоксів, розташованих в носовій кінцевості судна, призначеного для перевезення лісу. Дані для цього моделювання запозичені з підручника з суднобудівного креслення\*, в якому, окрім самого теоретичного креслення носової кінцевості лісовозу, наведені табличні дані для аплікату батоксів та деякі розміри, стосовно висот розташування верхньої палуби, палуби бака і козирка. Крім того, наведена числова інформація по семи ватерлініях. Вказано, що вантажна ватерлінія (ВВЛ) збігається з шостою ватерлінією. Автори розуміють, що проект судна не з нових, але наведеної у підручнику графічної та табличної інформації достатньо, щоб перевірити можливість застосування розробленого методу моделювання кривих до аналітичного подання батоксів теоретичного креслення корпусу судна.

Моделювання батоксів виконано на попередньо накресленій сітці. Діаметральний батокс, або інакше нульовий батокс, включає форштевень, кільову лінію, лінії верхньої палуби та палуби бака. Оскільки конструкція судна дещо застаріла і воно не дуже великої водотоннажності, то цей лісовоз немає бульбового закінчення носової кінцевості.

Невеликі кола, які можна бачити на рис. 4.25, відповідають точкам, побудованим за табличними даними, теоретичним кресленням з нанесеними на ньому розмірами, взятим із означеного джерела, а також точкам, отриманим розрахунковим шляхом.

При побудові проєкції "б'ік" теоретичного креслення виникла ситуація, коли треба було знаходити точки перетину кривої, що описує фальшборт, з проєкціями третього і четвертого шпангоутів. Оскільки абсциси розташування цих шпангоутів відомі, а також відоме параметричне рівняння

---

\* Гажиєв А.В., Кошкалда Н.В. Судостроительное черчение. – Л.: Судостроение, 1979. – 184 с.

кривої фальшборту, то для знаходження аплікат шуканих точок перетину проєкцій шпангоутів з лінією фальшборту необхідно знайти дугові координати цих точок.

Алгоритм вирішення цього питання зводиться до розв'язання однопараметричної задачі оптимізації, пов'язаної із знаходженням довжин дуг  $S_3$  і  $S_4$ , де індекс відповідає номеру шпангоута. Ці довжини дуг визначаються мінімізацією різниці абсциси проміжно отриманої точки від абсциси розташування шпангоуту,

## **5 МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ КРИВИХ ЗАЛІЗНИЧНИХ КОЛІЙ**

### **5.1 Геометричні особливості залізничної колії**

У промислово розвинених країнах, до яких належить і Україна, залізничний транспорт відноситься до сфери матеріального виробництва, своєрідною продукцією якого є пасажирські, вантажні та змішані вантажно-пасажирські перевезення. За будь-яких обставин безпека руху залізничного транспорту є одним з найважливіших питань його експлуатації.

Залізнична колія характеризується геометричним обрисом рейкових ниток у плані та профілі. На перший погляд вона, з геометричної точки зору, не представляє ніякого інтересу, оскільки для пересічного громадянина колія має вигляд прямолінійних рейок нескінченної довжини. В сприятливих природно-географічних умовах траса залізного шляху складається із прямолінійних рейок довжиною в десятки кілометрів. Але, у дійсності, залізнична колія, крім прямолінійних, має ще й криволінійні ділянки.

Криволінійні ділянки залізниці застосовують у тому випадку, коли необхідно обійти топографічні або геологічні перешкоди з метою зменшення будівельних витрат (скорочення обсягу земельних робіт, робіт на влаштування штучних споруд тощо) і забезпечення стійкості земельного полотна та інших залізничних споруд.

У різних країнах протяжність криволінійних ділянок залізничного

шляху може сягати 25 % відсотків загальної довжини мережі. У Німеччині та Швейцарії протяжність криволінійних ділянок залізничного шляху сягає 37 %, у Франції – приблизно 31 %. Але на деяких окремих шляхах питома вага криволінійних ділянок може доходити до 50 %. У першу чергу, це відноситься до тих залізничних шляхів, які прокладені в гірській місцевості.

Улаштування рейкової колії на кривих її ділянках має низку особливостей, обумовлених специфікою взаємодії колії і рухомого складу, змінами конфігурації колії на криволінійних ділянках і наявністю так званих перехідних кривих, які з'єднують кругові криві з прилягаючими прямими рейками або з'єднують кругові криві різних радіусів кривини. Призначенням перехідних кривих є забезпечення плавної зміни кривини в місцях з'єднання ділянок колії з різними сталими кривинами рейок.

Проектантами залізничної колії особлива увага приділяється улаштуванню перехідних ділянок при високих швидкостях руху потягів, застосуванні колійних кривих малого радіуса, при русі рухомого складу великої ваги та значної бази між колесами. У сучасних умовах, коли швидкість пасажирських потягів сягає 200 км/год і вище, вимоги до якості перехідних кривих суттєво зростають.

Підвищення швидкості руху поїздів, їх вантажопідйомності та забезпечення безпеки руху на криволінійних ділянках колії в значній мірі визначається геометричною досконалістю перехідних кривих цих ділянок. Розв'язання задачі геометричного моделювання перехідних кривих залізничних колій є важливою науково-технічною задачею.

Наукові дослідження в галузях прикладної та обчислювальної геометрії, комп'ютерної графіки останнім часом досягли значних успіхів у сфері аналітичного подання обводів і поверхонь різних технічних деталей та їх візуалізації за допомогою комп'ютера. Це дає можливість сподіватися, що застосування досягнень цієї галузі науки до геометричного моделювання перехідних кривих залізничної колії дозволить підвищити якість їх проектування і сприятиме підвищенню безпеки руху на цих дуже важливих і одночасно небезпечних ділянках шляху.

Розв'язування задачі вдосконалення методів геометричного моделю-

вання перехідних кривих залізничної колії, є актуальним, воно має не тільки значне теоретичне, але й важливе практичне значення.

Основи теорії перехідних кривих на залізниці були закладені на початку минулого століття і набули подальшого розвитку в роботах вітчизняних і закордонних дослідників. У цих роботах пропонується перехідні криві подавати клотоїдами, кардіоїдами, параболоми різних степенів, лемніскатами Бернуллі, мажорантними, пружними, швидкісними, Віденською дугою та іншими кривими. Усім цим переліченим кривим притаманні як переваги, так і певні недоліки.

З метою зниження витрат на будівництво залізничного шляху цілком слушним є бажання проєктантів створювати криволінійні ділянки найменших радіусів кривини. На жаль, подібні криві мають значні експлуатаційні недоліки. Будівельно-технічні норми обмежують радіуси кривини кривих, якими описуються криволінійні ділянки залізничної колії. При цьому радіуси кривини розділяються на рекомендовані та на допустимі в складних умовах будівництва залізниці.

Згідно з будівельно-технічними нормами магістральний залізничний шлях ділиться на шлях швидкісний, шлях особливо вантажонапружений та шляхи трьох категорій (з першої по третю). Для всіх цих категорій залізничного шляху рекомендований максимальний радіус кривини дорівнює 4000 м, а мінімальний радіус кривини зменшується з 3000 м до 1200 м, відповідно до перелічених вище категорій залізниці. Щодо радіуса кривини, який застосовується при проєктуванні залізничної колії в так званих складних умовах, то він може коливатися у межах від 2500 м до 800 м (менше значення радіуса кривини приймається для шляху третьої категорії).

Підвищений знос рейок на криволінійних ділянках залізничного шляху є наслідком прослизання коліс (вертикальний знос) і притиснення їх до бокових граней головок рейок під дією поперечних сил (бічний знос). Знос рейок в значній мірі залежить від радіуса кривини кривої, він інтенсивно зростає на криволінійних ділянках з радіусом кривини менше 700-800 м. Так, на криволінійних ділянках шляху з радіусом кривини 500 м суцільна заміна рейок проводиться приблизно в два рази частіше, а з радіу-

сом кривини 300 м – у 3,5 рази частіше, ніж на прямолінійних ділянках колії за інших однакових умов. Ще більшою мірою від радіуса кривини кривої залежить пошкоджуваність та одиночний вихід рейок з ладу.

Залежність зносу коліс рухомого складу від радіуса кривини кривої має приблизно такий же характер, як і залежність виходу рейок з ладу.

Найменш допустимі радіуси кривини криволінійних ділянок шляху визначаються умовами безпеки вписування рухомого складу в рейкові колії. Електровози і тепловози вписуються в криволінійні ділянки шляху з радіусом кривини 125 – 140 м. Але такі малі радіуси кривини, які забезпечують тільки заклинене вписування, в умовах звичайної експлуатації не допустимі. Тому при проектуванні нових залізниць мінімальні радіуси збільшують до 200 м і застосовують лише в особливо важких умовах на під'їзних та з'єднувальних коліях.

Криві дуже великих радіусів кривини також мають недоліки, обумовлені тенденцією до зміни свого обрису, тобто геометрії, перетворюючись на одних ділянках в прямі, а на інших – в криві менших радіусів, що зумовлює додаткові витрати на утримання таких криволінійних ділянок шляху, пов'язаних із заміною рейок, що змінили свою геометрію. Тому при проектуванні нових залізниць радіуси кривини більше 4000 м не застосовують.

Залізничні лінії в плані складаються з прямолінійних ділянок, сполучених між собою кривими лініями. Найбільш простою, технологічною й поширеною в практиці будівництва залізниць формою кривої є дуга кола. Такі криві в залізничній справі прийнято називати круговими кривими.

Для плавного переходу поїзда з прямої ділянки шляху в кругову і навпаки на залізницях влаштовуються перехідні криві (рис. 5.1).

Узагалі, перехідні криві є просторовими і мають кілька особливостей, зокрема:

- вони забезпечують плавне розширення колії в горизонтальній площині, тобто в плані;
- проектуються з кривиною, що поступово змінюється;
- мають плавне підвищення зовнішньої рейки.

Отже, у межах перехідної кривої плавно відводять підвищення зов-

нішньої рейки, що влаштовується в круговій кривій, і переходять від ширини колії 1520 мм, що застосовується на прямолінійній ділянці колії, до збільшеної ширини колії. Крім того, на двох і багатоколійних лініях збільшують відстань між осями шляхів. Усе це призводить до того, що осі рейок подаються нееквідистантними кривими.

Розширення залізничної колії виконується з метою забезпечення вписування рухомого складу в криволінійні ділянки шляху. Підвищення зовнішньої рейки передбачається для того, щоб навантаження на кожну рейку, з урахуванням дії відцентрової сили, було приблизно однаковим.

На залізницях багатьох країн прийнятий лінійний відвід підвищення зовнішньої рейки на криволінійній ділянці шляху. Довжину перехідної кривої визначають в залежності від підвищення зовнішньої рейки  $h$ , мм, і уклону відводу підвищення  $i$  (десятинний дріб).

Залізничний транспорт завжди нерозривно пов'язаний з безпекою руху, що безпосередньо залежить від будови та геометрії залізничної колії. При тривалій експлуатації верхньої будови колії, а особливо при експлуатації в складних кліматичних умовах, порушується її геометрія. Це може загрожувати безпеці руху особливо на кривих ділянках шляху.

Важливою особливістю, яка приймається до розгляду при побудові перехідних кривих, є забезпечення рівності нулю похідної від кривини в початковій та кінцевій точках перехідної кривої.

Нехай  $s$  – довжина шляху, яка обчислюється від початку ділянки перехідної кривої до поточної точки, а  $k(s)$  – кривина перехідної кривої. Граничні умови для перехідної кривої можна записати у наступному вигляді:

$$k(0) = 0; \quad k(S) = \frac{1}{R}; \quad \left. \frac{dk}{ds} \right|_{s=0}^{s=S} = 0, \quad (5.1)$$

де  $S$  – довжина перехідної кривої.

## **5.2 Моделювання перехідних кривих між прямолінійними рейками, розташованими під деяким кутом**

За традиційним підходом перехід між двома прямолінійними рейками залізничної колії, розташованими під деяким кутом відносно одна одної

реалізується наступним чином. Між першою прямолінійною рейкою і коловою ділянкою розташовують перехідну криву (див. рис. 5.1), за круговою ділянкою розташовують ще одну перехідну криву, призначену для плавного входу у другу прямолінійну рейку [3, 37, 77, 84].

Отже, перехід між двома прямолінійними рейками, розташованими під деяким кутом, налічує одну кругову ділянку та дві перехідні криві.

При формуванні переходу від прямолінійної рейки до кругової кривину перехідної кривої в початковій точці приймають рівною нулю, а в кінцевій точці – величині оберненій радіусу кругової ділянки, на якій кривина є величиною сталою.

Для зменшення кількості ділянок при переході між двома прямолінійними рейками, на відміну від традиційного методу, змодельємо перехідну криву параметричною кривою в натуральній її параметризації. При цьому опишемо залежність кривини від довжини дуги поліномом п'ятого степеня, взятому у наступному вигляді:

$$k(s) = as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f. \quad (5.2)$$

Похідна від кривини визначається залежністю:

$$\frac{dk(s)}{ds} = 5as^4 + 4bs^3 + 3cs^2 + 2ds + e. \quad (5.3)$$

Кут нахилу дотичної до модельованої кривої знаходиться за виразом:

$$\varphi_{\text{КПК}} = \varphi_{\text{ППК}} + \frac{aS^6}{6} + \frac{bS^5}{5} + \frac{cS^4}{4} + \frac{dS^3}{3} + \frac{eS^2}{2} + fS. \quad (5.4)$$

Застосувавши умови (5.1) до закону розподілу кривини (5.2) та її похідної (5.3), прийдемо до висновку, що  $f = 0$  і  $e = 0$ . Оскільки кути  $\varphi_{\text{ППК}}$  і  $\varphi_{\text{КПК}}$  задані, то послідовним застосуванням виразів (5.2) – (5.4) знаходимо залежності для коефіцієнтів  $c$ ,  $b$  і  $a$ :

$$c = 60 \frac{(\varphi_{\text{КПК}} - \varphi_{\text{ППК}})}{S^4} - \frac{4d}{S};$$

$$b = -\frac{2cS + 3d}{S^2};$$

$$a = -\frac{bS^2 + cS + d}{S^3}.$$

Коефіцієнт  $d$  і довжина дуги  $S$  визначаються шляхом розв'язання оптимізаційної задачі, пов'язаної з узгодженням проміжно отриманої кінцевої точки перехідної кривої з заданою кінцевою точкою.

За цільову функцію в оптимізаційній задачі приймається вираз:

$$\delta = \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2},$$

де  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – координати проміжної точки, визначеної з деякими значеннями невідомих параметрів, а  $x$ ,  $y$  – координати заданої кінцевої точки моделюваної кривої.

Безпосередньо для розв'язання оптимізаційної задачі застосовується високоєфективний алгоритм, запропонований Хуком–Дживсом [85].

Перехідна крива, яка подається в натуральній параметризації, описується наступними рівняннями:

$$x_{\text{КПК}} = x_{\text{НПК}} + \int_0^s \cos \varphi(s) ds; \quad (5.5)$$

$$y_{\text{КПК}} = y_{\text{НПК}} + \int_0^s \sin \varphi(s) ds. \quad (5.6)$$

Оскільки координати кінцевої точки перехідної кривої відомі, то цих двох рівнянь достатньо для визначення двох невідомих, необхідних для моделювання бажаної кривої.

За запропонованим методом геометричного моделювання перехідної кривої розроблено програмний код, який, окрім розрахунків, дозволяє візуалізувати отримані результати.

На рис. 5.2 показані три змодельовані перехідні криві між двома перетинними прямими. На цьому рисунку зображені ділянки цих прямих, які знаходяться поза межами перехідних кривих. Моделювання кривих виконано на одиничному квадраті. Прямі рейки розташовані симетрично відносно вертикальної осі, що проходить посередині квадрата.

Всі змодельовані криві виходили з однієї точки, розташованій в по-

чатку координат. Вони також закінчувалися також в одній і тій же точці. Кут нахилу прямих рейок в початку координат, змінювався від  $50^\circ$  (крива 1) до  $70^\circ$  (крива 3) з кроком  $10^\circ$ . Кут нахилу рейок після перехідних кривих дорівнював вказаним кутам, але взятим з від'ємним знаком.

На рис. 5.3 наведені графіки розподілу кривини цих кривих від відносної довжини дуги. Позначення кривих на цьому рисунку відповідає нумерації кривих, зображених на рис. 5.2. Відносно графіків розподілу кривини можна зробити висновки, що в початковій і кінцевій точках кривина має нульове значення, що відповідає умовам (5.1) моделювання перехідних кривих залізничних колій. Для прийнятих умов побудові перехідних кривих графіки кривини мають симетричний характер.

Криві, показані на рис. 5.4, відповідають розподілу похідних від кривини перехідних кривих, взятих по довжині дуги. За вісь абсцис, як і у випадку попереднього рисунку, прийнята відносна довжина дуги. Криві позначені у тій же послідовності, що й на вище зображених рисунках.

Як впливає з розгляду рис. 5.4, похідні від кривини по довжині дуги в початковій і кінцевій точках мають нульові значення. Криві похідних мають форму наближену до синусоїдальної.

На рис. 5.5 – 5.7 наведені результати моделювання перехідних кривих з асиметричним розташуванням прямих рейок. Відповідні розрахунки проводилися за умови, що кут нахилу прямих правих рейок зростає за модулем на  $15^\circ$  по відношенню до кутів прямих рейок, розташованих ліворуч.

Асиметричне розташування прямих рейок призвело до порушення симетрії графіків розподілу кривини та її похідної. Але вимоги, які накладаються граничними умовами (5.1) і в даному випадку повністю виконуються.

На підставі розробленого методу моделювання перехідної кривої між двома прямолінійними рейками залізничного шляху розроблено програмний код, який дозволяє виконувати розрахунки координат перехідних кривих з візуалізацією на екрані отриманих результатів.

### **5.3 Моделювання біклотоїдних перехідних кривих залізничного шляху**

Існуючі норми проектування високошвидкісних магістралей передбачають наступну геометрію в плані криволінійних ділянок: дві суміжні криві сполучаються прямими вставками, довжини яких регламентовані. В даному розділі розглядаються біклотоїдні криві.

У роботі Аккермана Г.Л.\* при переході від однієї прямолінійної рейки залізничної колії до другої пропонується замість сукупності колових, перехідних та прямолінійних ділянок (рис. 5.8, а) застосовувати біклотоїдну криву (рис. 5.8, б).

Біклотоїда – це крива, яка складається з двох однаково спрямованих клотоїд з однаковими параметрами без включення кругової кривини, в точці зіткнення яких обидві мають однакові радіуси і загальну дотичну.

Відомо, що клотоїда або спіраль Корню – крива, у якій кривина змінюється лінійно від довжини дуги.

Проаналізуємо аналітичні особливості клотоїди. Кривина цієї кривої підпорядковується залежності:

$$k(s) = as + b. \quad (5.7)$$

Похідна від цієї залежності є величиною сталою

$$\frac{dk(s)}{ds} = a.$$

Кут нахилу дотичної до модельованої клотоїдної кривої знаходиться за виразом:

$$\varphi_{\text{КПК}} = \varphi_{\text{ППК}} + \frac{aS^2}{2} + bS.$$

Параметричні рівняння клотоїди мають вигляд (1.10), тобто вони є тими ж самими, як і у першому розділі цієї роботи. Різниця тільки в визначенні залежності кута  $\varphi$  від довжини дуги кривої.

Розглянемо можливість застосування умов (5.1) до клотоїди. Якщо перші дві умови можна задовольнити, то рівність нулю похідної можлива тільки при  $a = 0$ . А це призводить до виродженої кривої, або інакше кривої,

---

\* Аккерман Г.Л., Аккерман С.Г., Кравченко О.А. Биклотоидное проектирование криволинейных участков железной дороги // Путь и путевое хозяйство: научно-популярный, производственно-технический журнал. – 2010. – №10. – С. 28-30.

яка не існує.

На рис. 5.9 наведені три біклотоїдні криві, маленькі кола на яких відповідають початковим, середнім і кінцевим точкам. Криві будувалися за умови, що кути нахилу дотичних в початкових та кінцевих точках дорівнювали  $15^\circ$  і були величинами незмінними. Варіювалася ордината середньої точки, яка поступово збільшувалася.

Аналізуючи вираз (5.7) можна прийти до висновку, що нульові значення координат  $x$  і  $y$  кінцевої точки можна отримати за умови, що криволінійна координата  $s$  має нульове значення, тому праві гілки біклотоїд, показаних на рис. 5.9, будувалися в напрямку протилежному напрямку побудови лівих гілок кривих. Це зробити було неважко, достатньо було поміняти місцями координати початкових і кінцевих точок. За цих обставин праве маленьке коло, яке вище було названо таким, що відповідає кінцевим точкам (у цілому для біклотоїд вони такими є) правильно було б назвати початковими точками гілок.

Дивлячись на наведені криві, можна стверджувати, що вони симетричні відносно вертикальної осі, яка проходить через середні точки. Кут нахилу дотичних в середніх точках мають нульове значення. Ліві та праві гілки мають  $S$ -подібний вигляд.

Додаткову інформацію щодо побудованих біклотоїд можна отримати, розглядаючи графіки розподілу кривини від довжини дуги. Подібні графіки показані на рис. 5.10, де за вісь абсцис прийнята відносна довжина кривої. Нумерація кривих на цьому і на попередньому рисунках збігається.

Як впливає з розгляду цього рисунку, графіки розподілу кривини мають симетричний характер. Зі збільшенням ординати середньої точки кривина кривих також збільшується. Треба зазначити, що кривина лівих гілок біклотоїдних кривих мала в основному від'ємні значення, а правих гілок – додатні значення. Тому при побудові кривих, показаних на рис. 5.10, кривина кривих правих гілок бралася з протилежним знаком.

На підставі розгляду вказаних графіків можна зробити висновок, що праві і ліві гілки біклотоїдних кривих стикуються з другим порядком гладкості, оскільки криві графіків розподілу кривини в точках стикування мають

злам, чого не має бути при стикуванні кривих з третім порядком гладкості..

На рис. 5.11 показані біклотоїдні криві, побудовані при варіюванні ординати середньої точки в межах 0,3...0,5 з кроком 0,1 та куті  $\varphi_{\text{ППК}} = 45^\circ$ . Як видно, всі криві мають опуклий характер, вони симетричні відносно вертикальної осі, взятої при  $\bar{s} = 1$ .

Графіки розподілу кривини цих кривих наведені на рис. 5.12. Відзначимо, що для кривої 2 вони мають лінійний характер. Оскільки біклотоїдні криві мають симетричний характер, то графіки кривини безперервні, хоча в точках стикування гілок є злам.

Побудуємо ділянку кривої залізничної колії, подібну тій, що показана на рис. 5.8,б, базуючись на теоретичному матеріалі першого розділу цієї роботи. Після деякої модернізації розробленого комп'ютерного коду були отримані результати моделювання біклотоїдної перехідної кривої (рис. 5.13).

Отже, на рис. 5.13 показана біклотоїдна крива, яка за своїм розташуванням і характером проходження нагадує криву, зображену на рис. 5.8, б. Це підтверджує можливість запропонованого методу аналітичного подання біклотоїдних кривих.

Графік розподілу кривини цієї біклотоїдної кривої наведений на рис. 5.14. Він має симетричний характер. Права і ліва гілки графіку стикуються зі зломом. Загальний вигляд цього графіку суттєво відрізняється від аналогічних графіків, показаних на рис. 5.10.

Розроблений програмний код дозволяє будувати асиметричні клотоїдні криві зі стикуванням в точках, в яких відносна довжина  $\bar{s}$  дорівнює одиниці.

Подібні криві показані на рис. 5.15. Вони побудовані на вихідних даних кривих, зображених на рис. 5.11, з тією відмінністю, що була змінена ордината кінцевої точки. Треба зазначити, що крива 1 повністю відповідає кривій, наведеній на рис. 5.13.

Більш цікаву інформацію можна отримати, розглянувши графіки розподілу кривини цих кривих (рис. 5.16)

Оскільки крива 1 повторює криву, показану на рис. 5.13 і є симетри-

чною, то графік розподілу її кривини повторює аналогічний графік, зображений на рис. 5.14. Характерною ознакою цієї кривої є рівність кривини в точці стикування правої і лівої гілок кривої. Щодо кривих 2 і 3 подібного висновку зробити неможливо, оскільки вони терплять розрив при  $\bar{s} = 1$ . Отже, при всій їх привабливості застосовувати в якості перехідних кривих залізничних колій неможливо. У цьому місці потяг буде відчувати удар, що негативно вплине на колісну пару, якщо потяг буде товарний, якщо ж він буде пасажирський, то пасажири відчують певну незручність, особливо ті, які стояли, не тримаючись за поручні.

#### **5.4 Моделювання S-подібних перехідних кривих залізничних колій**

Застосуємо теоретичний матеріал, викладений у першому підрозділі, для моделювання S-подібних перехідних кривих залізничних колій.

Так, на рис. 5.16 здійснено перехід між двома паралельними рейками, розташованими перпендикулярно до спостерігача. Маленькі кола вказують початок і кінець змодельованої S-подібної перехідної кривої. Прямі паралельні рейки не показані, але вони розуміються такими, що збігаються з лівою і правою межами рисунка.

Для того, щоб отримати бажану перехідну криву довелося в півтора рази збільшити координату  $y$  по відношенню до одиничного квадрату. Але це не означає, що S-подібну перехідну криву неможливо побудувати на одиничному квадраті. Просто у цьому випадку потяг змушений був би спочатку віддалятися від початкової точки, потім мав би рухатися у напрямку, який би дещо наближав потяг до початкової точки. У точці локального мінімуму перехідної кривої відбувався поворот у напрямку кінцевої точки перехідної кривої. Подібна траєкторія руху потягу можлива в умовах різкої зміни рельєфу місцевості.

Для того, щоб унаочнити перехідну криву, побудовану на одиничному квадраті, її візуалізацію наведено на рис. 5.17.

На рис. 5.18 показано графік розподілу кривини від відносної довжини дуги для тестової S-подібної перехідної кривої, зображеної на

рис. 5.17.

Як впливає з розгляду цього рисунку, графік розподілу кривини має симетричний характер, що є наслідком симетричності самої  $S$ -подібної перехідної кривої. В початковій та кінцевій точках кривина дорівнює нулю.

Подібні висновки можна зробити відносно графіка розподілу похідної від кривини по довжині дуги (рис. 5.19).

Вплив положення кінцевої точки перехідної кривої на характер їх проходження продемонстровано на рис. 5.20. На відміну від попередніх результатів на цьому рисунку залізничні рейки розташовані не вертикально, а під деяким кутом до горизонту. Кут на вході був однаковий і дорівнював  $85^\circ$ , на виході кут також був однаковий, але він дорівнював  $70^\circ$ .

Графіки розподілу кривини цих кривих показані на рис. 5.21. По-перше, вони свідчать про те, що в початковій і кінцевій точках перехідних кривих кривина дорівнює нулю, по-друге, побудовані криві на відміну від кривої, зображеної на рис. 5.18, не перетинаються в точці з координатами  $(1, 0)$ , а дещо нижче та правіше, що вказує на асиметричний їх характер. Зрозуміло, що це є наслідком різних величин кутів на входних і вихідних ділянках змодельованих перехідних кривих.

На рис. 5.22 наведені три перехідні криві, які моделювалися з додатковим по відношенню до кривих, показаних на рис. 5.20 впливом кутів на вході та виході з перехідної кривої. Але ці кути змінювалися синхронно, що приводило до того, що перехідні криві розташовувалися в умовному паралелограмі. Для кривої 1 вказані кути мали значення  $55^\circ$ , що призводило до уявного "вузького" паралелограму. При цьому її ордината кінцевої точки мала найбільше значення. У зв'язку з цим змодельована перехідна мала "пологий" вигляд.

Для кривих 2 і 3 початковий і кінцевий кути перехідних кривих збільшувалися на  $15^\circ$ , одночасно зменшувалася ордината кінцевої точки. Більш "крутий" вигляд має крива 3, це є наслідком того, що уявний паралелограм, у межах якого знаходилася перехідна крива, дуже наближався до охоплювального прямокутника.

Графіки розподілу кривини цих кривих показані на рис. 5.22. Всі

криві мають симетричний характер. Визначимося, що під симетричним характером кривих як цих, так і тих, про які говорилося вище, розуміється можливість накладення одна на одну гілок кривих після згинання графіку відносно вертикальних і горизонтальних осьових ліній. Криві, показані на рис. 5.23, перетинаються в точці з координатами  $(1, 0)$ .

Зазначимо, що криві 1 і 2 симетричні відносно горизонтальної осі. По-перше, це пояснюється тим, що кривині притаманний арифметичний знак. Відомо, що знак кривини вказує на розташування центру кривини, який не впливає на перехідні криві, що розглядаються в цьому дослідженні. По-друге, криві будуються в залежності від відносної довжини дуги, що, зрозуміло, призводить до їх певної деформації. Якщо побудувати ці криві в абсолютних значеннях довжини дуги, то це були б різні криві.

### **5.5 Моделювання перехідної кривої на обмеженій ділянці місцевості**

Метою цього підрозділу є подальший розвиток методу геометричного моделювання перехідних кривих залізничних колій, які будуються на місцевості, рельєф якої обумовлює певні обмеження на геометрію перехідної кривої, яка влаштовується між прямолінійною та круговою ділянками залізничної колії.

У практиці будівництва залізничних шляхів непоодинокі випадки, коли у зв'язку з рельєфом місцевості або за іншими якими-небудь причинами необхідно прокласти колію на обмеженій за розмірами ділянці місцевості. Під обмеженням будемо розуміти наявну в розпорядженні проєктанта відстань від початку перехідної кривої на прямолінійній ділянці колії до дотичної, проведеної до кругової ділянки шляху. При цьому дотична до кругової ділянки проводиться перпендикулярно до передбачуваного продовження прямолінійної рейки шляху (рис. 5.24).

Пропонується моделювати плоскі перехідні криві з використанням їх натуральної параметризації, яка передбачає наявність залежностей декартових координат моделюється кривої від довжини її дуги.

Побудову перехідної ділянки шляху здійснюватимемо з використан-

ням кривої, кривина якої описується кубічною залежністю від довжини її дуги  $s$ :

$$k(s) = as^3 + bs^2 + cs + d. \quad (5.8)$$

Коефіцієнти  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$  цієї залежності визначаються в процесі моделювання кривої.

При розв'язанні питання визначення невідомих коефіцієнтів залежності (5.8) за граничні умови приймається, що в початковій точці перехідної кривої її кривина дорівнює нулю, а в кінцевій – величині оберненій радіусу кругової ділянки шляху. Приймається, що в початковій і кінцевій точках перехідної кривої похідна від кривини по довжині дуги дорівнює нулю.

За цих умов коефіцієнти  $c$  і  $d$  дорівнюють нулю. Коефіцієнти  $a$  і  $b$  визначаються за умови, що відомі координати кінцевої точки прямолінійної ділянки шляху, кут його нахилу до горизонтальної осі, а також радіус кола, який описує кругову ділянку шляху.

Відомою є величина  $\Delta$ , яка обумовлюється обмеженими розмірами ділянки місцевості, де мають бути прокладені рейки залізничного шляху.

Нагадаємо, що для побудови перехідної кривої необхідно, крім коефіцієнтів  $a$  і  $b$ , також знати довжину дуги  $S$  цієї кривої.

З урахуванням граничних умов, які застосовуються до закону розподілу кривини для нашого випадку, остаточно отримаємо наступну залежність розподілу кута нахилу дотичної до кривої від її довжини:

$$\varphi(s) = \varphi_A + \frac{s^3}{RS^2} \left( 1 - \frac{s}{2S} \right), \quad (5.9)$$

де  $S$  – довжина дуги перехідної кривої між точками  $A$  і  $B$ , яка на початку моделювання є величиною невідомою.

Зазначимо, що на цьому кроці моделювання також невідомими є координати точки  $B$ . Але із залежності (5.9) можна при  $s = S$  знайти вираз для обчислення кута в кінцевій точці перехідної кривої:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{S}{2R}. \quad (5.10)$$

Координати точки  $B$  – кінцевої точки перехідної кривої, яка подаєть-

ся в натуральній параметризації, визначаються за виразами:

$$\begin{aligned}x_B &= x_A + \int_0^S \cos \varphi(s) ds; \\y_B &= y_A + \int_0^S \sin \varphi(s) ds.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Аналізуючи вирази (5.9) – (5.11) можна прийти до висновку, що в них єдиною невідомою величиною є довжина дуги перехідної кривої  $S$ .

Довжину цієї дуги визначимо числовим методом мінімізації функції, за яку береться відстань між центром  $C$  кола кругової ділянки та точкою  $C'$ , яка визначається тимчасово під час роботи алгоритму мінімізації. Вказана функція може бути записана наступним чином:

$$f = \sqrt{(x_C - x_{C'})^2 + (y_C - y_{C'})^2}.\tag{5.12}$$

Задавшись деякою величиною довжини перехідної кривої, можна визначити за формулами (5.11) координати деякої проміжної точки  $B$ . За перше наближення довжини перехідної кривої береться частка від величини обмеження  $\Delta$ . Координати точки  $C$  – центра кола кругової ділянки визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}x_C &= x_B + R \sin \varphi_B; \\y_C &= y_B - R \cos \varphi_B.\end{aligned}$$

З іншого боку ці координати можна розрахувати за наступними виразами:

$$\begin{aligned}x_{C'} &= (y_A - y_C) \sin \varphi_A \cos \varphi_A + x_A \cos^2 \varphi_A + \\&+ x_C \sin^2 \varphi_A + (\Delta - R) \cos \varphi_A; \\y_{C'} &= y_C + (x_{C'} - x_C) \operatorname{tg} \varphi_A.\end{aligned}$$

На рис. 5.25 у графічному вигляді наведено результати розв'язання тестової задачі, пов'язаної з моделюванням перехідної кривої на обмеженій ділянці. Прямолінійна ділянка шляху має кут нахилу до осі  $x$ , який дорівнює  $60^\circ$ ; вона закінчується в точці  $A$ . Необхідно побудувати перехідну криву між прямолінійною та круговою ділянками колії. Радіус кругової ділянки дорівнює 500 м. Обмеженням для моделювання перехідної кривої

виступає відрізок  $DM$ , який відповідає параметру  $\Delta$  (див. рис. 5.24). У розглянутому прикладі  $\Delta = 850$  м.

Результатом моделювання є побудована перехідна крива, яка починається в точці  $A$  і закінчується в знайденій точці  $B$  [12]. Були розраховані координати точки  $C$ , яка є центром кругової ділянки шляху. Відрізок  $BE$ , дотичний до кола кругової ділянки, є додатковим візуальним підтвердженням того, що відрізок  $CB$ , проведений із точки  $B$  (точки початку кругової ділянки), є перпендикулярним до дотичної  $BE$ .

Отже, точка  $B$  є закінченням перехідної кривої та початком кругової ділянки шляху, який моделюється на обмеженій ділянці місцевості.

Наведемо величини координат точок  $C$  і  $C'$ , які були отримані при розв'язанні тестової задачі:

$$\begin{aligned}x_C &= 629,3145 \text{ м}, \quad y_C = 40,8108 \text{ м}; \\x_{C'} &= 629,3143 \text{ м}, \quad y_{C'} = 40,8105 \text{ м}.\end{aligned}$$

Величина похибки, яка розраховувалася за формулою (5.12), в тестовій задачі становила 0,3675 мм.

Запропонований метод моделювання перехідних кривих може бути застосованим при проектуванні не тільки залізничного шляху, але й криволінійних обводів технічних виробів різного конструктивного оформлення та цільового призначення. Його можна поширити на побудову перехідної кривої між двома круговими ділянками залізничної колії.

#### **5.4 Побудова перехідної кривої для існуючих ділянок залізничного шляху**

При з'єднанні прямолінійної та кругової ділянок шляху потрібно забезпечити плавність перехідної кривої, а також рівність кутів нахилу дотичної та кривини на її кінцях (рис. 5.26). При цьому виникають задачі, коли розташування прямолінійної та центра кругової ділянок має залишитись незмінним, наприклад, при побудові перехідної кривої для існуючої ділянки залізничного шляху.

У такому випадку можна взяти криву, яка генерується за умови, що

задано графік розподілу кривини  $k$  четвертого порядку:

$$k(s) = as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e, \quad (5.13)$$

де  $a, b, c, d, e$  – невідомі коефіцієнти розподілу кривини;  $s$  – довжина кривої лінії.

Невідомі коефіцієнти залежності (5.13) та довжина кривої лінії  $s$  визначаються в процесі моделювання перехідної кривої, яка має відповідати певним, наперед заданим умовам її побудови.

Оскільки перехідна крива з'єднує прямолінійну та кругову ділянки, то в початковій точці  $A$  її кривина повинна дорівнювати нулю, а в кінцевій точці  $B$  – величині  $1/R$ . Крім того, для уникнення появи стрибкоподібного кутового прискорення при вписуванні екіпажу в криву похідна кривини на початку і в кінці перехідної кривої повинна дорівнювати нулю.

Похідна кривини, що подається залежністю (5.13), буде визначатися виразом:

$$\frac{dk(s)}{ds} = 4as^3 + 3bs^2 + 2cs + d. \quad (5.14)$$

Підставивши граничні умови до залежностей (5.13) і (5.14), отримаємо наступні вирази для коефіцієнтів розподілу кривини:

$$a = \frac{c - \frac{3}{RS^2}}{S^2};$$

$$b = -2 \frac{c - \frac{2}{RS^2}}{S};$$

$$d = e = 0,$$

де  $S$  – довжина перехідної кривої від точки  $A$  до точки  $B$ , яка є невідомою.

В отриманих залежностях усі параметри виражені через коефіцієнт  $c$ , що пояснюється причинами аналогічними, наведеним у підрозділі 5.3.

Підставимо значення коефіцієнтів до виразу (5.13) і отримаємо:

$$k(s) = \frac{s^2}{S^2} \left[ c(s - S)^2 + \frac{s}{RS^2} (4S - 3s) \right].$$

Вихідними даними для геометричного моделювання перехідної кри-

вої будуть наступні: координати кінцевої точки  $A$  прямолінійної ділянки залізничного шляху, кут нахилу прямолінійної ділянки  $\varphi_A$  в її кінцевій точці, радіус кола кругової ділянки  $R$  та її центр  $C$ .

Залежність для визначення кута нахилу дотичної до кривої в довільній її точці визначатиметься виразом:

$$\varphi(s) = \varphi_A + \frac{s^3}{5S^4} \left[ \frac{cS^2}{6} (6s^2 - 15sS + 10S^2) + \frac{s}{R} (5S - 3s) \right].$$

Кут нахилу дотичної  $\varphi_B$  до кругової ділянки обчислюватиметься за таким виразом:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{S}{5} \left( \frac{cS^2}{6} + \frac{2}{R} \right).$$

Координати початкової точки  $B$  кругової ділянки можна визначити з елементарних міркувань:

$$x_B = x_C - R \sin \varphi_B;$$

$$y_B = y_C + R \cos \varphi_B.$$

З іншого боку, координати кінцевої точки  $B$  перехідної кривої будуть обчислюватися за формулами:

$$x_B = x_A + \int_0^S \cos \varphi(s) ds;$$

$$y_B = y_A + \int_0^S \sin \varphi(s) ds.$$

Оскільки це одна й та ж точка, то прирівнявши її відповідні координати, отримаємо два рівняння з двома невідомими  $a$  та  $S$ :

$$x_C - x_A - R \sin \varphi_B - \int_0^S \cos \varphi(s) ds = 0;$$

$$y_C - y_A + R \cos \varphi_B - \int_0^S \sin \varphi(s) ds = 0.$$

Після знаходження невідомих параметрів за допомогою числового методу мінімізації функціоналу, за який прийнято відхилення проміжно отриманої точки кінцевої точки від заданої точки  $B$ , обчислюють координати перехідної кривої, які потім можна використовувати або для встанов-

лення нових, або для контролю вже існуючих рейок.

На рис. 5.27 представлені результати моделювання перехідної кривої  $AB$ , отриманої за таких вихідних даних: радіус кругової ділянки  $R = 310$  м, координати центра кола  $X_C = 384,5$  м,  $Y_C = 12,6$  м, кут нахилу прямолінійної ділянки  $\varphi_A = 60^\circ$  [71]. З розгляду рисунка випливає, що перехідна крива є дотичною до прямолінійної та кругової ділянок шляху.

На рис. 5.28 показані графіки розподілу кривини та похідної від неї, взятої по довжині дуги у відносному вигляді. Результати представлені в залежності від відносної довжини дуги кривої. Графік кривини свідчить про те, що ця характеристика кривої в початковій точці має нульове значення, а в кінцевій точці вона дорівнює оберненій величині радіуса кругової ділянки залізничного шляху. Похідна ж від кривини в цих точках має нульове значення. Тобто виконані всі умови, за яких будувалася перехідна крива.

Таким чином, розроблено новий метод геометричного моделювання перехідних кривих, який базується на застосуванні залежності кривини від довжини дуги четвертого степеня. За граничні умови беруться координати кінця прямолінійної ділянки залізничного шляху, значення кута нахилу цієї ділянки, величина радіусу кругової ділянки та координати її центру, а також кривина в граничних точках перехідної кривої. Важливість запропонованого методу моделювання перехідної кривої полягає в тому, що він дозволяє будувати ці криві для вже існуючих залізничних шляхів.

### **5.5 Моделювання перехідної кривої між прямолінійною та круговою ділянками шляху, розташованими у двох паралельних площинах**

Розглянемо геометричне моделювання перехідної кривої, яка реалізує плавний перехід від прямолінійної ділянки залізничного шляху до кругової за умови, що обидві ці ділянки знаходяться в площинах, паралельних між собою [11, 67].

Позначимо початкову і кінцеву точки перехідної кривої літерами  $A$  і  $B$ , відповідно. Їх координати застосовуються в якості вихідних даних при моделюванні перехідної кривої. Крім того, мають бути відомими кут  $\varphi_A$  – кут, утворений прямолінійною ділянкою з віссю абсцис, і кут  $\varphi_B$  – кут, утворений дотичною до кругової ділянки також з віссю абсцис. З вихідними даними задається радіус  $R$  кругової ділянки. Відхилення прямолінійної та кругової ділянок від площин, в яких вони знаходяться, тобто в точках  $A$  і  $B$ , дорівнюють нулю.

При з'єднанні прямолінійної та кругової ділянок у просторі потрібно забезпечити плавність перехідної кривої, а також рівність кутів нахилу дотичної та кривини на її кінцях (рис. 5.29).

Відхилення прямолінійної та кругової ділянок від дотичних площин, відповідно в точках  $A$  і  $B$ , приймемо рівними нулю.

Попередній аналіз показав, що кривину  $k$  перехідної кривої доцільно описати поліномом четвертого степеня, а скрут  $X$  – поліномом другого степеня, тобто задати їх у вигляді:

$$k(s) = a_1 s^4 + b_1 s^3 + c_1 s^2 + d_1 s + e_1; \quad (5.15)$$

$$\chi(s) = a_2 s^2 + b_2 s + c_2, \quad (5.16)$$

де  $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2$  – невідомі параметри розподілів кривини та скруту, що знаходяться в процесі моделювання кривої;  $s$  – довжина кривої лінії.

Оскільки перехідна крива з'єднує прямолінійну та кругову ділянки, то в початковій точці  $A$  її кривина дорівнює нулю, а в кінцевій точці  $B$  – величині, оберненій радіусу кривини, тобто  $1/R$ .

Запишемо вираз похідної від рівняння кривини:

$$\frac{dk}{ds} = 4a_1 s^3 + 3b_1 s^2 + c_1 s + d_1. \quad (5.17)$$

Вираз для визначення кута нахилу дотичної в точці  $B$  матиме вигляд:

$$\varphi_B = \varphi_A + \frac{a_1 S^5}{5} + \frac{b_1 S^4}{4} + \frac{c_1 S^3}{3} + \frac{d_1 S^2}{2} + e_1 S. \quad (5.18)$$

Підставляючи вихідні дані до виразів (5.15), (5.17) і (5.18), отримує-

МО:

$$e_1 = 0;$$

$$d_1 = 0;$$

$$b_1 = \frac{20}{3S} \left( \frac{\Delta\varphi}{S^3} + \frac{k_B}{5S^2} - \frac{c_1}{3} \right); \quad (5.19)$$

$$a_1 = - \left( \frac{k_B}{S^4} + \frac{b_1}{2S} \right), \quad (5.20)$$

де  $k_B = \frac{\Delta\varphi}{R}$ ;  $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ ;

$S$  – довжина перехідної кривої від точки  $A$  до точки  $B$ .

Вираз для визначення кута  $\psi$  відхилення кривої від дотичної площини в точці  $B$  матиме вигляд:

$$\psi_B = \psi_A + \frac{a_2 S^3}{3} + \frac{b_2 S^2}{2} + c_2 S.$$

Визначимо з цього виразу коефіцієнт  $a_2$  за умови, що  $\psi_A$  і  $\psi_B$  згідно з вихідними даними дорівнюють нулю

$$a_2 = - \frac{3}{2S^2} (b_2 S + 2c_2).$$

Таким чином, для моделювання перехідної кривої треба знайти коефіцієнти  $c_1$ ,  $b_2$  і  $c_2$ , а також довжину дуги  $S$ .

Визначення цих невідомих величин реалізуємо шляхом розв'язання задачі мінімізації, в якій за цільову функцію приймається відхилення проміжно отриманої кінцевої точки перехідної кривої від заданої точки  $B$ :

$$\Delta = \sqrt{(x_B - x_k)^2 + (y_B - y_k)^2 + (z_B - z_k)^2}. \quad (5.21)$$

У цьому виразі індекс "к" відповідає кінцевій точці проміжно змодельованої кривої.

Для мінімізації записаного функціоналу застосовано високоефективний алгоритм, запропонований Хуком–Дживсом.

На рис. 5.30 показані перехідні криві, побудовані за умови, що варіюється кут нахилу дотичної в початковій точці в межах від  $30^\circ$  до  $50^\circ$  з кроком  $5^\circ$ . Слід зазначити, що при менших значеннях кута, що варіюється,

отримані перехідні криві в горизонтальній проекції в певній мірі нагадують так звану Віденську дугу.

Виконання поставлених умов до моделювання просторових перехідних кривих можна побачити на рис. 5.31, де показані фронтальні і горизонтальні проекції кривих, розглянутих вище на рис. 5.30. Щодо рис. 5.31, то на ньому застосовано розташування координатних осей, притаманне комплексним кресленням нарисної геометрії. Фронтальні проекції перехідних кривих чітко свідчать про те, що їх лінійні та кругові ділянки розташовані у паралельних площинах.

Для більшої інформативності на рис. 5.32 показані просторові перехідні криві, які отримані із застосуванням розробленої програми та візуалізовані у середовищі проектування AutoCAD завдяки сформованим у розробленій програмі так званих *script*-файлів. Представлені на цьому рисунку результати відображають вплив кута нахилу дотичної в початковій точці. Вони отримані із застосуванням можливостей 3D моделювання середовища проектування AutoCAD.

Слід зазначити, що на рис. 5.32 зображені аксонометрична і три ортогональні проекції, які відповідають фронтальній, горизонтальній та профільній площинам проекцій. Крім того, додамо, що на цьому рисунку виділені тільки криволінійні ділянки залізничного шляху, тобто безпосередньо перехідні криві.

Вплив кута нахилу дотичної в кінцевій точці перехідної кривої продемонстровано на рис. 5.33. Цей кут зменшувався у межах від  $15^\circ$  до  $-5^\circ$  з кроком  $-5^\circ$ .

Графічні результати, наведені на рис. 5.30 – 5.33, отримані за умови, що кінцева точка *B* перехідних кривих свого положення не змінювала.

Вплив же зміни положення кінцевої точки перехідних кривих показано на рис. 5.34. Ці дані візуально підтверджують можливість моделювання перехідних кривих при зміні положення також і кінцевих точок цих кривих.

Таким чином, розроблено новий метод геометричного моделювання перехідних кривих у просторі, який базується на застосуванні поліномів

четвертого степеня для розподілу кривини та другого степеня для розподілу скруту. За граничні умови беруться координати кінця прямолінійної ділянки залізничного шляху, значення кута нахилу цієї ділянки, радіус кругової ділянки, координати її початкової точки та кут нахилу дотичної в цій точці. Відхилення кривої від дотичної площини в кінцевих точках приймаються рівними нулю.

Перехідні криві, отримані за запропонованим методом геометричного моделювання, можна використовувати для геометричного моделювання криволінійних обводів об'єктів у різних галузях промисловості, у тому числі при проектуванні перехідних кривих верхньої будови залізничної колії.

### **5.6 Геометричне моделювання просторової перехідної кривої між прямолінійною та круговою ділянками шляху з різними кутами нахилу до дотичних площин**

При з'єднанні прямолінійної та кругової ділянок, розташованими під різними кутами до дотичних площин, потрібно забезпечити плавність перехідної кривої, а також врахувати кути нахилу дотичної ( $\varphi_A$  і  $\varphi_B$ ), відхилення кривої від дотичної площини ( $\psi_A$  і  $\psi_B$ ) та кривини ( $0$  і  $1/R$ ) на її кінцях (рис. 5.35). Перший погляд на рис. 5.35 і 5.29 свідчить про те, що нібито на них наведена одна й та ж графічна інформація. Проте більш детальний аналіз показує, що на рис. 5.35 введені до розгляду кути  $\psi_A$  і  $\psi_B$ , які визначають відхилення прямолінійної та кругової рейок від двох заданих площин. Введення вказаних кутів дещо ускладнює розв'язання задачі, пов'язаної з моделювання перехідної кривої.

Кривину і скрут модельованої перехідної кривої будемо подавати поліномами четвертого і другого степенів, тобто застосувати формули (5.15) і (5.16), відповідно.

З урахуванням наявної вихідної інформації відносно кривини перехідної кривої приходимо до висновку, що коефіцієнти  $d_1$  і  $e_1$  дорівнюють нулю.

Застосовуючи значення кривини в початковій і кінцевій точках перехідної кривої, за виразами (5.19) і (5.20) знаходимо коефіцієнти  $b_1$  і  $a_1$ .

Проінтегрувавши вираз (5.16), який визначає розподіл скруту по довжині перехідної кривої, та прийнявши до уваги значення кутів  $\psi_A$  і  $\psi_B$ , визначимо вираз для обчислення коефіцієнта  $a_2$ :

$$a_2 = 3 \left( \frac{\psi_B - \psi_A}{S^3} - \frac{b_2}{2S} - \frac{c_2}{S^2} \right).$$

Значення інших невідомих коефіцієнтів  $c_1$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  і довжину  $S$  дуги кривої від точки  $A$  до точки  $B$  знаходимо методом, багато разів застосованим в цій роботі.

Зазначимо, що у зв'язку з врахуванням кута  $\psi$ , вирази для обчислення координат точки  $B$  набули вигляду:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \int_0^S \cos \psi(s) \cos \varphi(s) ds; \\ y_B &= y_A + \int_0^S \cos \psi(s) \sin \varphi(s) ds; \\ z_B &= z_A + \int_0^S \sin \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (5.22)$$

На рис. 5.36 наведені результати моделювання трьох перехідних кривих, які з'єднують прямолінійні та кругові ділянки. Площина розташування кругових ділянок нахилена до горизонтальної площини під кутом  $\psi_B = 5^\circ$ . Криві побудовані за умови, що змінюється положення кінцевої точки перехідної кривої (точка  $B$ , що, відповідно, призводило до переміщення центра кола кругової ділянки (точка  $C$ ). Праворуч після точки  $B$  можна бачити дуги еліпсів, в які проєкціюються кола кругових ділянок перехідних кривих.

Ортогональні проєкції просторових перехідних кривих, при моделюванні яких застосовувалися кути  $\varphi$  и  $\psi$ , показані на рис. 5.37. Підйом ліній, який видно на фронтальній проєкції, обумовлений не тільки наявністю кута  $\psi_B$ , але й поступовим збільшенням координати  $z$  точки  $B$  – кінцевої точки перехідної кривої. Тобто ця точка переміщувалася у просторі. Зрозуміло, що підйом колії дещо перевищений, але при отриманні наведених результатів його було збільшено для того, щоб криві відрізнялися одна від одної у більшому ступені.

До речі, представлені графічні результати є додатковим підтвердженням працездатності розробленого підходу до моделювання просторових перехідних кривих залізничних колій, який враховує їх відхилення від дотичної площини.

### 5.7 Побудова перехідної кривої для двох прямих ділянок шляху, розташованих у паралельних площинах

Розглянемо довільну просторову ділянку залізничного шляху, яка з'єднує дві прямолінійні ділянки, розташовані у паралельних площинах (рис. 5.38). Для побудови перехідної кривої потрібно забезпечити її неперервність і плавність, а також забезпечення кутів нахилу дотичних ( $\varphi_A$  і  $\varphi_B$ ) та кривини на кінцях кривої і прямолінійних ділянок (точки  $A$  і  $B$ ).

Оскільки перехідна крива з'єднує прямолінійні ділянки, розташовані у паралельних площинах, то кривина, скрут і відхилення кривої від дотичної площини на її кінцях повинні дорівнювати нулю.

Враховуючи вище вказане, для моделювання просторової перехідної кривої візьмемо наступні закони розподілу кривини  $k$  і скруту  $\chi$ :

$$k(s) = a_1 s^5 + b_1 s^4 + c_1 s^3 + d_1 s^2 + e_1 s + f_1;$$

$$\chi(s) = a_2 s^2 + b_2 s + c_2.$$

Застосування умов (5.1) до залежності кривини від довжини дуги призводить до того, що коефіцієнти  $e_1$  і  $f_1$  дорівнюватимуть нулю.

Коефіцієнти  $a_1$ ,  $c_1$  і  $d_1$  залежності кривин від довжини дуги кривої знаходяться за виразами:

$$a_1 = 12 \frac{\varphi_B - \varphi_A}{S^6} - \frac{2b_1}{5S};$$

$$c_1 = -3a_1 S^2 - 2b_1 S;$$

$$d_1 = -(a_1 S^2 + b_1 S + c_1) S.$$

Оскільки у випадку, що розглядається, кути  $\psi$  на початку перехідної кривої та в її кінцевій точці дорівнюють нулю, то вираз для коефіцієнта  $a_2$  закону розподілу скруту матиме вигляд:

$$a_2 = -\frac{3(b_2 S + 2c_2)}{2S^2}.$$

Коефіцієнти  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  і довжина  $S$  дуги перехідної кривої визначаються методом, широко застосованим у цій роботі.

Розташування перехідних кривих, що з'єднують прямолінійні ділянки залізничного шляху, в плані показане на рис. 5.39. Ортогональні проєкції цих же кривих наведені на рис. 5.40, де на фронтальній площині проєкцій чітко видно, що кінцеві ділянки перехідних кривих розташовані в паралельних площинах.

Слід додати, що на цих рисунках з метою економії місця, подані тільки перехідні криві, тобто без дотичних до них прямолінійних ділянок. На обох цих рисунках при моделюванні перехідних кривих змінювалися координати  $x$  і  $y$  кінцевої точки, що чітко впливає з розгляду рис. 5.39, на якому кінцеві точки показані у вигляді кола невеличкого радіуса.

Зазначимо, що на рис. 5.39 перехідні криві пронумеровані, ця система нумерації повторюється на подальших рисунках, що надає можливість визначати відповідність, отриманих графічних результатів. Щодо рис. 5.40, то відповідність між кривими, показаними на рис. 5.39 і на рис. 5.40 легко простежується за довжиною горизонтальних проєкцій перехідних кривих.

На рис. 5.41 для зображених кривих наведені відповідні графіки розподілу кривини від відносної довжини дуги. Як впливає з розгляду цих даних, ступінь кривини збільшується із збільшенням порядкового номера кривих, що для заданих умов моделювання перехідних кривих призводить до зменшення їх довжини і збільшення їх крутизни. Крім того, перехідні криві, показані на рис. 5.41, на початку і наприкінці мають нульові значення кривини, що відповідає умовам (5.1).

Похідні від кривини дуги по її довжині показані на рис. 5.42. Графіки похідних також побудовані в залежності від відносної довжини дуги. Вони свідчать про те, ці похідні в початковій і кінцевій точках перехідних кривих мають нульові значення, що є наслідком моделювання кривих з урахуванням умов (5.1). На цьому рисунку похідна збільшена в  $5 \times 10^3$  разів

На рис. 5.43 для прикладу наведено графік розподілу кута  $\psi$  відхи-

лення перехідної кривої від дотичної площини в залежності від відносно довжини дуги. Ці дані відповідають п'ятому варіанту побудови перехідної кривої. Для інших варіантів вони мають приблизно однаковий характер, всі криві групувалися в вузькій зоні, тому показувати всі ці криві не було сенсу. Як і передбачалося кути  $\psi$  в початковій і кінцевій точках мають нульові значення. Але для отримання просторової кривої треба було додати скрут, що й було виконано.

Отже, запропоновано новий підхід до геометричного моделювання просторових перехідних кривих поширено на забезпечення плавного переходу між двома прямолінійними ділянками залізничного шляху, розташованими у паралельних площинах, для чого застосовано закони розподілу кривини п'ятого і скриту другого степенів від довжини дуги.

### **5.10 Моделювання просторової перехідної кривої, що з'єднає дві кругові ділянки**

При з'єднанні двох кругових ділянок залізничного шляху доцільно також використовувати перехідну криву особливо, коли кругові ділянки мають різний напрямок повороту, тобто кривина ділянок має протилежний знак. При цьому можливі випадки розташування ділянок на різній висоті.

Розглянемо довільну просторову ділянку залізничного шляху, що з'єднає дві кругові ділянки, розташовані у паралельних площинах (рис 5.44). На рисунку показані кругові ділянки з протилежно направленою кривиною, а також з нульовим скрутом в початковій та кінцевій точках.

Для побудови перехідної кривої задаються кути нахилу дотичних  $\varphi_A$  і  $\varphi_B$ , радіуси кіл кругових ділянок  $R_1$  і  $R_2$  та координати їх центрів  $C_1$  і  $C_2$ .

Моделювати просторову перехідну криву будемо, застосовуючи залежності кривини і скриту, які подаються виразами (5.15) і (5.16), відповідно. Координати точок просторової перехідної кривої визначатимуться за виразами (5.22).

В початковій і в кінцевій точках перехідної кривої кривина повинна дорівнювати оберненому значенню радіуса відповідної кругової ділянки, тобто:

$$k_A = \frac{1}{R_1}; \quad k_B = \frac{1}{R_2},$$

а перша похідна кривини повинна мати нульове значення.

Застосовуючи граничні умови (5.1) до виразів (5.15), (5.17) і (5.18), отримаємо:

$$a_1 = \frac{15}{S^4} \left( \frac{2(\varphi_B - \varphi_A)}{S} - k_A - k_B \right);$$

$$b_1 = -2 \left( \frac{k_B - k_A}{S^3} + a_1 S \right);$$

$$c_1 = 3 \frac{k_B - k_A}{S^2} + a_1 S^2;$$

$$d_1 = 0; \quad e_1 = k_A.$$

На рис. 5.45 наведені три перехідні між двома круговими ділянками з радіусами  $R_1$  і  $R_2$ , які дорівнюють 400 і 300 м, відповідно. Координати центрів кіл  $C_1$  і  $C_2$  задані. Кут  $\varphi_A$  варіювався в межах від  $-10^\circ$  до  $-20^\circ$  з кроком  $-5^\circ$ , кут  $\varphi_B$  – в межах від  $70^\circ$  до  $80^\circ$  з кроком  $5^\circ$ .

Таким чином, розроблено підхід до побудови просторової перехідної кривої, що з'єднує дві кругові ділянки залізничного шляху, розташовані у паралельних площинах.

На завершення треба зазначити, треба зазначити, що всі наведені в цьому розділі графічні результати мають чисто ілюстративний характер. Крім того, фахівці в залізничній справі можуть запропонувати й інші варіанти сполучення залізничних рейок, які вимагають влаштування перехідних кривих.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Автоматизация процессов подготовки авиационного производства на базе ЭВМ и оборудования с ЧПУ / В.А. Вайсбург, Б.А. Медведев, А.Н. Бакунский и др. – М.: Машиностроение, 1985. – 216 с.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
3. Амелин, С.В., Дановский Л.М. Путь и путевое хозяйство. – М.: Транспорт, 1986. – 215 с.
4. Аронов Б.М., Жуковский М.И., Журавлев В.А. Профилирование лопаток авиационных газовых турбин. – М.: Машиностроение, 1975. – 192 с.
5. Ашик В.В. Проектирование судов: Учебник. – Л. Судостроение, 1985. – 320 с.
6. Бойко А.В., Гаркуша А.В. Аэродинамика проточной части паровых и газовых турбин: расчеты, исследования, оптимизация, проектирование. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 360 с.
7. Борисенко В.Д. Комп'ютерне моделювання кривих ліній у натуральній параметризації з кубічною залежністю кривини від довжини дуги // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – Миколаїв: МНУ, 2017, № 2 (4). – С. 9 – 13.
8. Борисенко В.Д., Слободян С.О., Устенко А.С. Моделювання корабельних кривих з квадратичним законом розподілу кривини // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – Миколаїв: МНУ, 2017, № 1 (3). – С. 34 – 38.
9. Борисенко В.Д., Устенко А.С. Алгоритми моделювання поверхонь у натуральній параметризації // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – Миколаїв: МНУ, 2018, № 1 (5). – С. 29–38.
10. Борисенко В.Д., Устенко А.С. Моделювання корабельних кривих у натуральній параметризації з лінійним законом розподілу кривини // Збірка доповідей VI-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених", 28 – 29 квітня 2017 р. – Київ, НТУУ "КПІ" імені Ігоря Сикорського, 2017. – С. 46–50. (10)
11. Борисенко В.Д., Устенко С.А. Геометричне моделювання просторових перехідних кривих залізничних колій // Радіоелектроніка, інформатика, управління. – Запоріжжя, 2017. № 4.– С. 33 – 39. (11)
12. Борисенко В.Д., Устенко С.А. Моделювання перехідної кривої на обмеженій ділянці місцевості // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені Академіка В. Лазаряна, 2017, № 2 (68). – С. 92– 100. (12)
13. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Агарков О.Ю. Алгоритм побудови поверхонь із заданими законами розподілу кривини // Збірник праць XII Міжнародної науково-практичної конференції "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". ТАAPSD'2015. – Київ, 2015. – С. 8 – 15.
14. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Агарков О.Ю. Складені поверхні з лінійними законами розподілу кривини // Збірник праць XIII Міжнародної науково-практичної конференції "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". ТАAPSD'2016. – Київ, 2016. – С. 30 – 34.
15. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Комар В.С. Геометричне моделювання меридіонального обводу робочого колеса радіально-осьового турбодетандера // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: Праці ТДАТА, 2007. – Вип. 4. – Том 35. – С. 26–31.
16. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Комар В.С. Геометричне моделювання плоских криволінійних обводів за заданим параболічним законом розподілу їх кривини //

Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – Вип. 4. – Том 35. – С. 26 – 31.

17. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Комар В.С. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу із застосуванням кубічного закону розподілу його кривини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 79. – С. 52 – 57.

18. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Мельник В.А. К вопросу моделирования обводов профилей лопаток осевых турбин // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2016". – Воронеж : Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2016. – С. 99 – 104.

19. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривиною // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип. 5. – С. 30–34.

20. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є. Геометричне моделювання плоских кривих із застосуванням лінійного елемента кривини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 43–49.

21. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спицын В.Е. Моделирование плоских сечений лопаток осевых газовых турбин // Газотурбинные технологии. – Рыбинск: ООО "Издательский дом "Газотурбинные технологии", 2014. – Вып. 121 (2). – С. 22–26.

22. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Спіцин В.Є. Удосконалення геометрії профілів лопаток осьових компресорів // Сборник научных трудов: межведомственный научно-технический сборник. – К.: Випол, 2004. – Спецвыпуск. – С. 49–54.

23. Борисенко В.Д., Устенко С.А., Устенко І.В. Моделювання складених кривих із застосуванням лінійних законів розподілу їх кривини // Наукові праці: Науково-методичний журнал. – Вип. 254. Т. 266. Комп'ютерні технології. – Миколаїв: Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 6 – 10.

24. Боровиков И.Ф., Щербинин С.В. Конструирование гиперповерхностей с помощью нелинейных преобразований // Прикладная геометрия. – М.: МАИ, 2003. – Вып. 5, № 11. – С. 1–12. – Режим доступа до журн.: <http://www.mai.ru/~apg/Volume5/Number11/borovikov511.pdf>.

25. Бронников А.В. Проектирование судов. – Л.: Судостроение, 1990. – 327 с.

26. Готман А.Ш. Проектирование обводов судов с развертывающейся обшивкой. – Л.: Судостроение, 1979. – 192 с.

27. Давыдов А.Б., Кобулашвили А.Ш., Шерстюк А.Н. Расчет и конструирование турбодетандеров. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.

28. Давыдов Ю.В., Злыгарев В.А. Геометрия крыла: Методы и алгоритмы проектирования несущих поверхностей. – М.: Машиностроение, 1987. – 136 с.

29. Епифанова В.И. Компрессорные и расширительные турбомашинны радиального типа. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. – 624 с.

30. Зарянкин А.Е., Шерстюк А.Н. Радиально-осевые турбины малой мощности. – М.: Машгиз, 1963. – 248 с.

31. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. – М.: Машиностроение, 1982. – 192 с.

32. Карелин А.М. Построение решетки турбинных профилей на основе рациональных параметрических кривых // Лопаточные машины и струйные аппараты. – М.: ЦИАМ, 1989. – Вып. 9. – С. 79–89.

33. Карцев Л.В. Теория и расчет гидродинамических трансформаторов и муфт: Учебное пособие. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 416 с.

34. Кини Р.П., Райха Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с.

35. Ковалев В.А. Новые методы автоматизации проектирования судовой поверхности. – Л.: Судостроение, 1982. – 212 с.

36. Константинов М.Т. Расчет программ фрезерования на станках с ЧПУ. – М.: Машиностроение, 1985. – 160 с.
37. Лазарян В.А. О форме переходной кривой (Теоретические основы выбора рациональной формы переходной кривой) // Динамика транспортных средств. – Киев : Наукова думка, 1985. – С. 10–24.
38. Легета Я.П. Опис та побудова замкнутої кривої за її натуральними рівняннями // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 219 – 228.
39. Левенберг В.Д., Борисенко В.Д., Гильмутдинов Л.А. Аналитическое профилирование турбинных решеток для системы автоматизированного проектирования. – Николаев: НКИ, 1980. – 51 с.
40. Ли В.Г. Дискретно-интегральное конструирование пространственных кривых в натуральной параметризации // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1998. – Вип. 64. – С. 98 – 100.
41. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. – М.: Машиностроение, 1967. – 372 с.
42. Мамаев Б.И., Рябов Е.К. Построение решетки турбинных профилей методом доминирующей кривизны // Теплоэнергетика. – 1979. – № 2. – С. 52–55.
43. Методы построения и согласования судовой поверхности с помощью ЭВМ / В.В. Ашик, А.А. Богданов, И.Б. Мараева, А.Н. Шебалов. – Л.: Судостроение, 1978. – 78 с.
44. Никулин Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
45. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. – М.: ГИФМЛ, 1955. – 244 с.
46. Пилипака С.Ф. Графо-аналитический метод приближенного построения кривой по заданному натуральному уравнению // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1989. – Вип. 48. – С. 44–45.
47. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Федорович Пилипака; КНУБА. – К., 2000. – 35 с.
48. Пилипака С.Ф., Гнітецька Т.В. Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: Праці ХДУХТ, 2002. – Вип. 1. – С. 24 – 26.
49. Пилипака С.Ф., Захарова Т.М. Знаходження плоских алгебраїчних кривих, які описуються параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С. 277 – 284.
50. Пилипака С.Ф., Захарова Т.М. Конструювання сферичних кривих у функції натурального параметра // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь: Видавництво МДПУ, 2014. – Том 1. – С. 137 – 145.
51. Пилипака С.Ф., Захарова Т.М., Федорина Т.П. Конструювання поверхонь у функції натурального параметра на поверхнях обертання // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2012, вип. 4. – Том 55. – С. 176 – 184.
52. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М. Побудова просторової кривої лінії за заданими натуральними рівняннями // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: КГТУСА, 1996. – Вип. 59. – С. 106 – 107.
53. Пилипака Т.С. Дослідження плоских кривих, натуральні рівняння яких мають синусоїдний характер // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 76. – С. 160 – 165.
54. Поликарпов А.Л. Применение составных кривых Безье для построения ре-

- шеток турбинных профилей // ИВУЗ "Энергетика". – 1991. – № 3. – С. 89–93.
55. Поляков А.Ю., Брусенцев В.А. Методы и алгоритмы компьютерной графики в примерах на Visual C++. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
56. Программный лазерный раскрой текстильных материалов / А.А. Бирюков, А.Р. Молгачев, Л.М. Сафонов и др. – М.: Легкая индустрия, 1978. – 192 с.
57. Проектування морських транспортних суден: Навчальний посібник / О.І. Кротов, В.І. Голюков, О.Ю. Єганов, О. В. Бондаренко. – Миколаїв: УДМТУ, 2003. – 156 с.
58. Пустюльга С.І., Самостян В.Р. Дискретне моделювання кривих за заданими функціями зміни кривини та скруту // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Міжвузівський збірник (за напрямком "Інженерна механіка"). – Луцьк: ЛДТУ, 2008. – Вип. 22, ч. 1. – С. 286 – 292.
59. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.
60. Родин П.Р. Основы проектирования режущих инструментов. – К.: Выща школа, 1990. – 424 с.
61. Савелов А.А. Плоские кривые [Текст] / А. А. Савелов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 294 с.
62. Скуба Д.В. Разработка методов дизайн-проектирования легковых автомобилей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.03 "Колесные и гусеничные машины" / Денис Владиславович Скуба. – Ижевск, – 2005. – 209 с.
63. Устенко І.В. Застосування синусоїдальної залежності кривини від довжини дуги при геометричному моделюванні кривих ліній // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – Миколаїв: МНУ, 2017, № 2 (4). – С. 95 – 100.
64. Устенко С.А. Геометрична теорія моделювання криволінійних форм лопаткових апаратів турбомашин з оптимізацією їх параметрів: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / Сергій Анатолійович Устенко; КНУБА. – К., 2013. – 40 с.
65. Устенко С.А. Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини // Вестник Херсонського національного технічного університета. Вип. 2(31). – Херсон: ХНТУ, 2008. – С. 480–484.
66. Устенко С.А., Агарков О.Ю. Геометричне моделювання просторових кривих із застосуванням формул Серре-Френе // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 358 – 362.
67. Устенко С.А., Діданов С.В. Метод побудови просторової перехідної кривої // Наука та прогрес транспорту. – 2013. – № 2 (44). – С. 124–128.
68. Устенко С.А., Діданов С.В. Просторові криві лінії заданих розподілів кривини та скруту // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2012. – № 30. – С. 201 – 205.
69. Устенко С.А., Діданов С.В., Агарков О.Ю. Геометричне моделювання кривих ліній із заданою кривиною в граничних точках // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 404–409.
70. Устенко С.А., Діданов С.В., Агарков О.Ю. Дослідження кривих ліній, заданих кубічним розподілом кривини // Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2014. – № 2 (50). – С. 164 – 170.
71. Устенко С.А., Мартиненко В.С. Геометричне моделювання перехідних кривих залізничного шляху при відновленні його окремих ділянок // Геометричне моделювання та інформаційні технології: науковий журнал. – Миколаїв: МНУ, 2017, № 2 (4). – С. 101 – 105.
72. Фиников С.П. Дифференциальная геометрия. – М.: Издательство МГУ, 1961. – 159 с.

73. Холщевников К.В., Емин О.Н., Митрохин В.Т. Теория и расчет авиационных лопаточных машин. – М.: Машиностроение, 1986. – 432 с.
74. Цепков В.А. Профилирование затылованных инструментов. – М.: Машиностроение, 1979. – 150 с.
75. Чапман Ф. Г. Опыт теоретического рассуждения об удобнейшем образовании и надлежащей величине линейных кораблей, а равно фрегатов и других меньших судов. – Спб. Тип. Морского Мин., 1836. – XLII. – 166 с.
76. Челомбiтько В.Ф. Геометричне моделювання візерунків поліграфічного захисту цінних паперів лініями зі змінною кривиною: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.03 "Технічна естетика" / Віктор Федорович Челомбiтько; КНУБА. – К., 2015. – 22 с.
77. Шахунянец Г.М. Проектирование железнодорожного пути. – М.: Транспорт, 1972. – 140 с.
78. Шикин Е.В., Каменецкий М.М. Кривые на плоскости и в пространстве. – М.: Фазис, 1997. – 325 с.
79. Якунин В.И., Рыжов Н.Н. Теоретические основы формирования моделей поверхностей. – М.: МАИ, 1985. – 49 с.
80. Adams J.A. The intrinsic method for curve definition // Computer Aided Design. – 1975. – Vol. 7, No 4. – P. 243 – 249.
81. A numerical study of cubic parabolas on railway transition curves / T.-I Shen, Ch.-H. Chang, K.-Yu. Chang, Ch.-Ch. Lu // Journal of Marine Science and Technology. – 2013. – Vol. 21, No. 2. – P. 191–197.
82. Ball A.A. CONSURF, Part 2: Description of the algorithms // Computer Aided Design, 1975. № 7 – P. 237 – 242.
83. Catmull E., Rom R. A class of local interpolating splines // Computer Aided Geometric Design, R. E. Barnhill and R. F. Reisenfeld, Eds. Academic Press, New York, 1974. – P. 317 – 326.
84. Eliou, N., Kaliabetsos G. A new, simple and accurate transition curve type, for use in road and railway alignment design // European Transport Research Review. – 2014. – No. 6. – P. 171–179.
85. Hooke R., Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems // Journal of the ACM. – 1961. – Vol. 8, No 2. – P. 212–229.
86. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., Fomenko A.T. Computer modeling of curves and surfaces // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 172. – No. 5. – P. 663 – 682.
87. Lipicnik, M. New form of Road/Railway Transition Curve // J. of Transportation Engineering. – 1998. – Vol. 124. – Iss. 6. – P. 546–556.
88. Pal T.K. Nutbourne A.W. Two-dimensional curve synthesis using liner curvature elements // Computer Aided Design. – 1977. – Vol. 9. – No 2. – P. 77–84.
89. Pritchard L.J. An eleven parameter axial turbine airfoil geometry model // ASME paper. – 1985. – 85-GT-219. – 12 p.
90. Ralston W. Mathematical methods for digital computers. – Wiley, New York – London, 1960. – P. 95 – 109.
91. Rogers D.F. An introduction to NURBS: with historical perspective. – San Diego, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. – 324 p.
92. Schecter A. Linear blending of curvature profiles // Computer Aided Design. – 1978. – Vol. 10, No 2. – P. 101 – 109.
93. Schecter A. Synthesis of 2D curves by blending piecewise linear curvature profiles // Computer Aided Design. – 1978. – Vol. 10, No 1. – P. 8 – 18.
94. Tari E. Baykal O. A new transition curve with enhanced properties // Canadian J. of Civil Engineering. – 2005. – Vol. 32. – Iss. 5. – P. 913–923.
95. Taylor, D. W. On ships forms derived by formula // Trans. Soc. Naval Archit. and Marine Eng., 1903. – V. XI. – P. 242.