

DOI 10.15589/jnn20150613

УДК 665.3.061.3

Г36

**MATHEMATICAL MODEL
OF HEAT TRANSFER DURING THE EXTRACTION OF PARTICLES
OF IDEAL (SPHERICAL) AND REAL FORMS**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА
ПРИ ЭКСТРАГИРОВАНИИ ИЗ ЧАСТИЦ ИДЕАЛЬНОЙ (СФЕРИЧЕСКОЙ)
И РЕАЛЬНОЙ ФОРМ**

Kateryna V. Heorhiiesh
ekaterina.georgiesh@mail.ru
ORCID: 0000-0002-7045-8039

Е. В. Георгиев
асп.

Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa
Одесская национальная академия пищевых технологий, г. Одесса

Abstract. Mass flow stability method, allowing to clarify the existing analytical dependences for calculating the target component withdrawal from the classical-shape bodies (unlimited plate, cylinder, sphere) was proposed. On the example of the III class bodies, application of the method is shown. A mathematical model of the target component extraction from the round particle was developed and the dependence to calculate the concentration was obtained. Consideration of the real body shape deviations from perfect in the form of the shape factor allows to refine the design value for the bodies, corresponding to the III class. It was found that the deviation of the concentration values for the perfect body from real would be the greater, the smaller the particle radius. The maximum relative error of calculations is 11.3%. It is shown that the target component extraction process is rather complicated and depends strongly on a large number of defining physical characteristics: particle size, diffusion coefficient, mass transfer coefficient, temperature, duration.

Key words: extraction; mathematical model; real-size bodies; target component; concentration; particle size.

Аннотация. Составлена математическая модель процесса извлечения целевого компонента из материалов для тел III класса. Для учета влияния реальной формы поверхности тела предложена гипотеза стабильности потока массы. Проведены расчеты относительной концентрации целевого компонента при различной длительности экстрагирования. Определено влияние температуры и размера частиц на степень извлечения целевого компонента.

Ключевые слова: экстрагирование; математическая модель; тела реальных размеров; целевой компонент; концентрация; размер частиц.

Анотація. Створено математичну модель процесу вилучення цільового компоненту із матеріалу для тіл III класу. Для врахування впливу реальної форми поверхні тіла запропонована гіпотеза стабільності потоку мас. Проведено розрахунки відносної концентрації цільового компоненту при різній тривалості екстрагування. Визначено вплив температури і розміру частинок на ступінь вилучення цільового компоненту.

Ключові слова: екстрагування; математична модель; тіла реальних розмірів; цільовий компонент; концентрація; розмір часток.

REFERENCES

- [1] Veynik A. I. *Priblizhennyi raschet protsessov teploprovodnosti* [Approximate calculation of heat conductivity processes]. Moscow, Gosenergia Publ., 1959. 183 p.
- [2] Leontev A. I. *Teoriya teplomassoobmena* [Theory of heat and mass transfer]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979. 495 p.
- [3] Lykov A. V. *Teplomassoobmen* [Heat and Mass Transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1978. 480 p.
- [4] Lysyanskiy V. M. *Ekstragirovanie v pishchevoy promyshlennosti* [Extracting in the food industry]. Moscow, Agropromizdat Publ., 1987. 182 p.
- [5] Maksudov R. N., Yegorov A. G., Mazo A. B., Alyaev V. A., Abdullin I. Sh. *Matematicheskaya model ekstragirovaniya semyan maslichnykh kultur sverkhkriticheskim dioksidom ugleroda* [Mathematical model of extraction of oil seeds by supercritical carbon dioxide]. *Sverkhkr. flyuidy: Teoriya i praktika*. 2008, vol. 3, no 2, pp. 20–32.

- [6] Plyukha S. Yu. *Razrabotka i nauchnoe obosnovanie sposoba ekstragi-rovaniya iz yachmenya, zheludey i tsikoriya zhidkim dioksidom ugleroda Aftoreferat Diss.* [Development and scientific substantiation of the method of extraction of barley, acorns and chicory liquid carbon dioxide]. Voronezh, 2012. 19 p.
- [7] Chemat F., Grivotto G. *Microwave-assisted extraction for bioactive compounds. Theory and practice.* New York, Springer Publ., 2013. 248 p.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Математическое моделирование процессов экстрагирования вследствие многофакторности процесса (определяющего размера частицы, коэффициента массоотдачи, коэффициента диффузии, температуры) и зависимости основных кинетических характеристик от длительности и способа извлечения целевого компонента не может быть описано едиными уравнениями и требует составления частных моделей, характеризующих конкретный физический объект. При исследовании экстрагирования веществ из материалов растительного происхождения для получения данных о кинетике выхода биологически активных компонентов, необходимо учитывать форму частиц, полученных после измельчения материала, которая, в основном, относится к телам третьего класса (определяющие размеры сопоставимы по трем координатным осям. Для дополнения существующих моделей следует получить математическую модель в дифференциальном виде для тел в форме шара, решение которой позволит найти распределение концентрации в любой момент времени при условии, что концентрация в любой точке есть функция времени и радиуса r .

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Большой интерес к разработке математических моделей связан с необходимостью получения достоверных данных по полноте извлечения целевого компонента и оптимизации самого процесса.

Математическая модель экстрагирования для тел, форма которых принимается соответствующей форме шара, предложена в работе [1], модель учитывает процесс переноса массы целевого компонента (масла) внутри частицы, основным механизмом которого является диффузионный перенос по межклеточным каналам.

Целесообразность моделирования тел в форме бесконечной пластины [2] определяется тем, что более интенсивное экстрагирование для исследуемого сырья наблюдается при измельчении в лепестки, вследствие более развитой поверхности контакта фаз и очень малой толщиной лепестка, которая определяет уменьшение извилистости капилляров. В работе получено выражение для поля концентраций, позволяющее получить значение концентрации в любой точке пластины для любого момента времени.

В [3] на основе баланса теплоты и массы получена зависимость для расчета теплоты и концентрации,

которая учитывает площадь поверхности контакта жидкость — твердое тело, однако не анализирует методы ее определения. Все существующие модели, целью которых является получение точных аналитических решений задач массоотдачи из твердого тела в экстрагент, основываются на известных теоретических положениях, учитывающее дифференциальное уравнение [4, 5]: $\frac{D\rho_i}{d\tau} = D\nabla^2\rho_i$ или $\frac{Dm_i}{d\tau} = D\nabla^2m_i$.

и дифференциальное уравнение массоотдачи: $\beta = -\frac{D}{\rho_{icc} - \rho_{io}} \left(\frac{\partial\rho_i}{\partial y} \right)_{y=0}$, где c_i — плотность i -го компонента, $m_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ — концентрация компонента;

β — коэффициент массоотдачи; D — коэффициент диффузии, ρ — плотность смеси.

С учетом условий однозначности, в которые входят форма тела и начальное распределение концентрации, получаются решения для частных случаев. Однако, все существующие модели не учитывают реальную форму поверхности тела.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ — получение аналитических зависимостей для расчета концентрации целевого компонента при экстрагировании его из частиц с формой, соответствующей телам третьего класса, что позволяет расчетным путем проводить оценку степени извлечения и влияние основных характеристик на кинетику процесса.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Математическая модель переноса массы целевого компонента, который может быть как единственной целевым веществом (ЦК), в частности, со свойствами биологически активного вещества, так и одним из его компонентов, в дифференциальной виде представлен зависимостью (1) и начальными и граничными условиями (2)–(3). Дифференциальное уравнение диффузионного извлечения целевого компонента из частицы в форме шара для симметричной задачи:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}, \text{ кг/(м}^3\cdot\text{с)}. \tag{1}$$

Начальные условия:

$$\phi = 0, C = C_0, \bar{C} = const, C = f(r), \tag{2}$$

Граничные условия:

$$-\frac{D}{C - \bar{C}} \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R} = \beta, \text{ м/с}; \frac{\partial C(0, \tau)}{\partial r} = 0; C(0, \tau) \neq \infty, \tag{3}$$

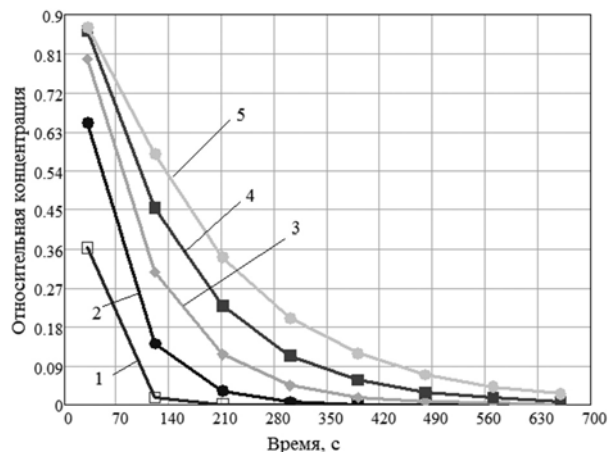


Рис. 1. Кинетика извлечения целевого компонента (масла) при различных значениях радиуса сферической частицы R : 1 — $R = 2$ мм; 2 — $R = 4$ мм; 3 — $R = 6$ мм; 4 — $R = 8$ мм; 5 — $R = 10$ мм

где r — текущий радиус сферы, м; R — радиус сферы, м; $0 \leq r \leq R$; C — текущая концентрация ЦК в сферической частице, кг/м³; C_0 — начальная концентрация ЦК в частице, кг/м³; \bar{C} — средняя концентрация ЦК в экстрагенте, кг/м³; D — коэффициент диффузии, м²/с; v — коэффициент массоотдачи, м/с. Решение дифференциального уравнения (1) в условиях (2)–(3), полученное при использовании метода разделения переменных, представлено уравнением (4):

$$\frac{C - \bar{C}}{C_0 - \bar{C}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n)}{\mu_n - \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n} \times \frac{R}{r} \cdot \frac{\sin\left(\mu_n \cdot \frac{r}{R}\right)}{\mu_n} \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo_D}, \quad (4)$$

где Fo_D — диффузионное число Фурье: $Fo_D = \frac{D \cdot \tau}{R^2}$; μ_n — характеристические числа.

На рис. 1 приведены данные расчета относительных концентраций ЦК в сфере, полученные для различных радиусов R при условии $\bar{C} = 0$. Относительная концентрация — отношение текущей концентрации к начальной: $\frac{C}{C_0}$, график построен при значениях $v = 2,5 \cdot 10^{-5}$ м/с; $D = 2,0 \cdot 10^{-7}$ м²/с.

Увеличение коэффициента диффузии существенно интенсифицирует экстрагирование (рис. 2), что верно отражает физический процесс. Как указывается в работе [6], посвященной определению коэффициента диффузии, при использовании традиционных методов его порядок составляет 10^{-9} м²/с. При применении метода микроволновой экстракции это значение увеличится вследствие того, что возникают дополнительные механизмы переноса [5].

Анализ результатов позволяет заключить, что расчет относительной концентрации по зависимости (4) для тела сферической формы без учета длительности пропитки материала экстрагентом соответствует физическому процессу извлечения ЦК из материала в экстрагент и коррелируются с экспериментальными данными.

С целью корректировки расчетных данных по концентрации ЦК из тел неправильной формы, целесообразно развить метод стабильности потока массы по аналогии с методом стабильности теплового потока [7]. Основу данного метода составляет особое свойство поля концентраций, благодаря которому сложное трехмерное поле реальных тел можно приближенно найти по формулам для одного из классических тел. В соответствии с принципом стабильности, потоки, проходящие через поверхности реального и классического тела одного класса, равны. Расчет процесса экстрагирования ЦК из материала произвольной формы предлагается вести по формулам для тел соответствующего класса, вместе с тем в диффузионное число Био Bi_D следует подставлять $\beta_0 = \beta \cdot \frac{F}{F_0} = \beta \cdot \chi$, а не истинное значение: $Bi_D = \frac{\beta_0 \cdot l_0}{D}$, где F — площадь поверхности реального тела, F_0 — площадь основного (классического) тела, χ — коэффициент формы, l_0 — характерный размер тела. Для тел третьего класса (определяющие размеры сопоставимы по трем координатными осями) $l_0 = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, где V — объем реального тела. На рис. 3 приведены результаты расчетов относительной концентрации, полученные для классической сферы и для тела, форма которого близка к кубу.

Данные, приведенные на рис. 2 и рис. 3, свидетельствуют о том, что в рамках тел одного класса ход кинетических кривых не меняется, но влияние на выход ЦК является существенным, что позволило сделать вывод о необходимости учета реальной формы поверхности. При переходе к реальной форме поверхности скорость выхода целевого компонента растёт.

В табл. 1 приведены данные по погрешности расчета концентрации, относительной $\frac{C}{C_0}$ и абсолютной C , позволяющие оценить, как влияет определяющий размер частицы (r — для шара, l_0 — для реального тела) на точность расчета при переходе от идеализированного тела к реальному. Расчеты проведены для диапазона изменения $R = 2, 10$ мм, длительность экстрагирования — 210 с, коэффициент массоотдачи $v = 2,5 \cdot 10^{-5}$ м/с, коэффициент диффузии $D = 2 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Относительная погрешность определялась как отношение абсолютного изменения концентрации, полученной при расчете для классического тела (сфера) и реального тела III класса, к значению

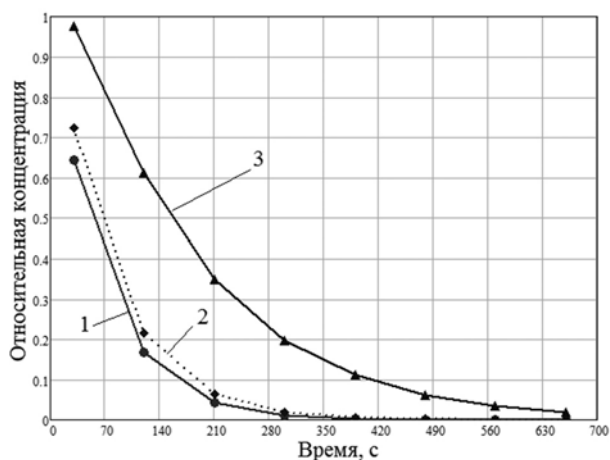


Рис. 2. кинетики извлечения целевого компонента (масла) при различных значениях коэффициента диффузии D :
 1 — $D = 2,38 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; 2 — $D = 2,38 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$; 3 — $D = 2,38 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$; $v = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$; $R = 5 \text{ мм}$

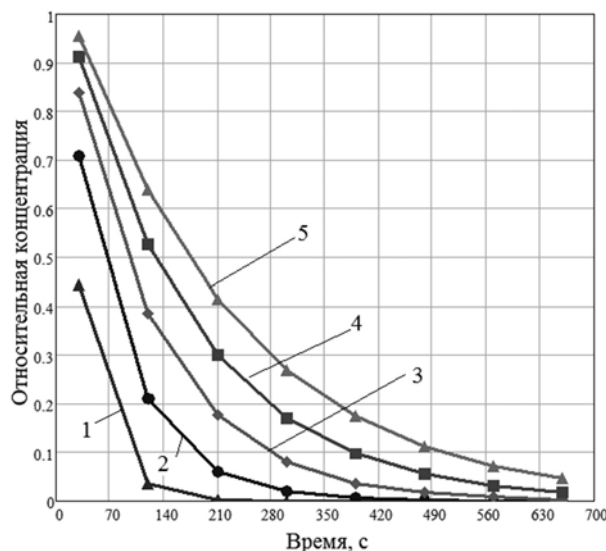


Рис. 3. Кинетика выхода целевого компонента (масла) из частиц растительного материала (тела III класса) реального размера:

1 — $l_0 = 1,24 \text{ мм}$; 2 — $l_0 = 2,48 \text{ мм}$; 3 — $l_0 = 3,72 \text{ мм}$; 4 — $l_0 = 4,96 \text{ мм}$; 5 — $l_0 = 6,21 \text{ мм}$; $v = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$; $D = 2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$

Таблица 1. Сравнительная оценка концентрации ЦК частиц классической формы и реальной формы

$r, \text{ мм}$	$l, \text{ мм}$	$C_{ш}$	$C_{ш}/C_0$	C_k	C_k/C_0	δ
2	1,241	0,0000945	0,0006300	0,0004252	0,0028345	77,78
4	2,482	0,0045796	0,0305308	0,0093514	0,0623424	51,03
6	3,723	0,0174255	0,1161699	0,0265068	0,1767123	29,44
8	4,964	0,0340541	0,2270274	0,0450184	0,3001224	24,36
10	6,205	0,0511833	0,3412217	0,0621764	0,4145090	17,68

δ — относительная погрешность, %; r — радиус классического тела; l — определяющий размер реального тела.

концентрации для реального тела в рассматриваемый момент времени.

При переходе к расчету концентрации в реальной частице получено, что изменение относительной поверхности на 29% приводит к изменению концентрации на 77,78% — для $R = 2 \text{ мм}$ (наименьший радиус), и на 17,68% — для $R = 10 \text{ мм}$ (наибольший радиус). Таким образом, принимая принцип стабильности потока массы, можно уточнить расчетные данные по концентрации целевого компонента в зависимости от характерного размера частицы.

ВЫВОДЫ. 1. Математические модели, описывающие процесс переноса вещества в материале при экстрагировании в условиях микроволнового нагрева, целесообразно составлять на основе имеющихся классических моделей, которые основываются на общих законах диффузии вещества и учитывают специфические эффекты микроволнового нагрева в коэффициентах диффузии.

2. Предложен метод стабильности потока массы для расчетов концентрации ЦК в материале при пе-

реходе от тел классической формы к телам реальной формы, который использует особое свойство поля концентрации, благодаря которому поле реальных тел можно найти по формулам для одного из классических тел.

3. Установлено, что в рамках тел одного класса ход кривых не меняется, но влияние на выход ЦК является существенным: при переходе к расчету концентрации в реальной частице получено, что изменение относительной поверхности на 29% приводит к изменению концентрации на 77,78% — для $R = 2 \text{ мм}$ (наименьший радиус), и на 17,68% — для $R = 10 \text{ мм}$ (наибольший радиус). Принимая принцип стабильности потока массы, можно уточнить расчетные данные по концентрации целевого компонента в зависимости от характерного размера частицы.

4. Область применения полученных зависимостей ограничивается малыми значениями диффузионного числа Фурье: так, при $Fo < 0,03$ расчетные значения перестают соответствовать реальному процессу выхода потока массы целевого компонента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Вейник, А. И.** Приближенный расчет процессов теплопроводности [Текст] / А. И. Вейник. — М. : Гос. энерг. изд, 1959. — 183 с.
- [2] **Леонтьев, А. И.** Теория тепломассообмена [Текст] / А. И. Леонтьев. — М. : Высшая школа, 1979. — 495 с.
- [3] **Лыков, А. В.** Тепломассообмен [Текст] : справочник / А. В. Лыков. — М. : Энергия, 1978. — 480 с.
- [4] **Лысянский, В. М.** Экстрагирование в пищевой промышленности [Текст] / В. М. Лысянский, С. М. Гребенюк. — М. : Агропромиздат, 1987 — 182 с.
- [5] **Максудов, Р. Н.** Математическая модель экстрагирования семян масличных культур сверхкритическим диоксидом углерода [Текст] / Р. Н. Максудов, А. Г. Егоров, А. Б. Мазо, В. А. Аляев, И. Ш. Абдуллин // Журн. «Сверхкр. флюиды: Теория и практика». — 2008. — Т. 3, № 2. — С. 20–32.
- [6] **Плюха, С. Ю.** Разработка и научное обоснование способа экстрагирования из ячменя, желудей и цикория жидким диоксидом углерода [Текст] : автореф. дис. к-та. техн. наук / С. Ю. Плюха. — Воронежский государственный университет инженерных технологий» (ФГБОУ ВПО «ВГУИТ»), 2012. — 19 с.
- [7] **Chemat, F.** Microwave-assisted extraction for bioactive compounds. Theory and practice [Text] / F. Chemat, G. Grivotto. — New York: Springer, 2013. — 248 p.

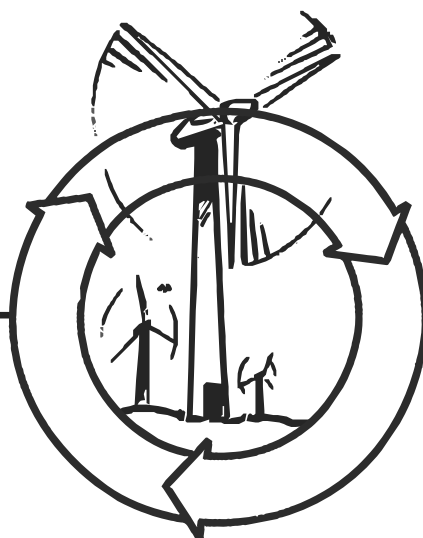
© К. В. Георгієш

Надійшла до редколегії 02.12.2015

Статтю рекомендує до друку член редколегії ЗНП НУК
д-р техн. наук, проф. *М. І. Радченко*

ТЕХНОГЕННА БЕЗПЕКА

Калюжин А. С.
Лагутін А. Є.
Липа А. І.
Марченко В. Г.
Мотигіна В. С.
Пономаренко А. П.
Тимченко І. В.



Збірник
наукових праць
2015