

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет кораблебудування  
імені адмірала Макарова

Кафедра будівельної механіки та конструкції корпусу корабля

**Методичні вказівки**  
до самостійної роботи студентів  
заочної форми навчання  
при вивченні дисципліни «Опір матеріалів»

**Частина II**



ВИДАВНИЦТВО  
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ  
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА

2021

**УДК 539(076)**  
**М54**

*Автори:* Л. І. Коростильов, д-р техн. наук, професор;  
С. Ю. Клименков, старший викладач;  
Д. Ю. Литвиненко, канд. техн. наук, асистент;  
В. М. Соков, асистент;  
Є. Ю. Дядюра, завідувач лабораторією;  
Л. М. Морозан, завідувач навчальним кабінетом;  
Ю. М. Ткаченко, завідувач лабораторією

*Рецензент:* Бурдун Є. Т., канд. техн. наук, професор НУК, завідувач кафедри проєктування та виробництва конструкцій із композиційних матеріалів

*Рекомендовано методичною радою  
Кораблебудівного інституту НУК імені адмірала Макарова  
(протокол № 5 від 05.02.2020 р.)  
як методичні вказівки*

**Методичні вказівки до самостійної роботи студентів заочної форми навчання при вивченні дисципліни «Опір матеріалів» : метод. вказ. ; Ч. II. / Л. І. Коростильов, С. Ю. Клименков, Д. Ю. Литвиненко та ін. – Миколаїв : НУК, 2021. – 52 с.**

Наведено матеріали, необхідні для самостійної роботи студентів при вивченні другої частини програми дисципліни «Опір матеріалів», зміст, вихідні дані, приклади для виконання індивідуальних розрахункових та контрольних робіт. Представлено перелік типових питань до захисту робіт, складання заліку і екзамену, типові задачі, а також перелік основної і додаткової літератури.

**УДК 539(076)**

© Колектив авторів, 2021  
© Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, 2021

## ***ЗМІСТ***

<b>ВСТУП</b> .....	<b>4</b>
<b>ТЕМИ ЧАСТИНИ II</b> .....	<b>5</b>
<b>ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ</b> .....	<b>12</b>
<b>ПИТАННЯ ДО ЗАХИСТУ РОБІТ</b> .....	<b>34</b>
<b>ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПР МАТЕРІАЛІВ»</b> .....	<b>37</b>
<b>ПИТАННЯ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ЗАЛІКУ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПР МАТЕРІАЛІВ»</b> .....	<b>41</b>
<b>ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ІСПИТУ І ЗАЛІКУ</b> .....	<b>43</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>46</b>
<b>ДОВІДКОВІ ТАБЛИЦІ</b> .....	<b>48</b>

## ***ВСТУП***

Частина друга індивідуального комплексу є завершальною при вивченні дисципліни „Опір матеріалів” у другому семестрі.

Навчальними планами для студентів-заочників всіх спеціальностей в цьому семестрі передбачені оглядові лекції, практичні і лабораторні заняття, а також виконання контрольної роботи № 2. В кінці семестру відповідно до плану студенти складають іспит або залік.

Тематика задач контрольної роботи № 2 охоплює основні розділи заключної частини курсу. Вихідні дані для рішення задач, що наведені у цій роботі, вибираються студентом із відповідних таблиць за типом схеми і номером варіанту, заданими викладачем. Оформлення контрольної роботи здійснюється власноручно в зошиті або на стандартних аркушах паперу А4 із зазначенням номера роботи, типу схеми і номера варіанту. При цьому розв'язку кожної задачі повинні передувати її зміст (умова) та вихідні дані.

Наприкінці комплексу надано список рекомендованої літератури, необхідної для самостійного вивчення програмного матеріалу і підготовки до складання іспитів і заліків.

Журнал для виконання лабораторних робіт за тематикою другої частини дисципліни є окремим додатком до комплексу. У журналі для кожної роботи наведено основні поняття і означення, необхідні вказівки щодо виконання експериментів, а також перелік контрольних питань, правильна відповідь на які забезпечить успішний захист.

Складати іспит чи залік дозволяється студентам, які виконали і захистили контрольну роботу, а також передбачений робочою навчальною програмою перелік лабораторних робіт.

## ТЕМИ ЧАСТИНИ II

**Згинання.** Балки та їх опори. Поперечні сили і згинальні моменти в перерізах балки та їх епюри. Диференціальні залежності між поперечною силою, згинальним моментом і розподіленим навантаженням ([1] гл. 3, стор. 46–62; [2] гл. 3, стор. 53–70). Нормальні та дотичні напруження при згині балок ([1] гл. 10, стор. 237–249; [2] гл. 10, стор. 259–272). Розрахунок балок на міцність при згинанні ([1] гл. 10, стор. 249–261; [2] гл. 10, стор. 272–284).

**Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.** Визначення переміщень інтегруванням диференціального рівняння згину балки. Визначення лінійних і кутових переміщень балок методом початкових параметрів ([1] гл. 10, стор. 265–290; [2] гл. 10, стор. 289–314). Загальні теореми про пружні системи. Методи визначення переміщень пружних систем ([1] гл. 13, стор. 354–385; [2] гл. 13, стор. 381–416).

**Складний опір.** Складний і косий згин. Згин із розтягом (стисканням). Згин із крученням ([1] гл. 12, стор. 325–353; [2] гл. 12, стор. 352–381).

**Статично невизначувані системи.** Основні поняття і визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваної системи. Розрахунок простих статично невизначуваних балок. Канонічні рівняння методу сил для балок і рам. Рівняння трьох моментів для багатопрогонових балок ([1] гл. 14, стор. 386–413; [2] гл. 14, стор. 417–445).

**Стійкість стиснутих стержнів.** Основні поняття і умова стійкості. Визначення критичних сил і напружень однопрогонових стержнів. Розрахунок стиснутих стержнів на стійкість ([1] гл. 19, стор. 492–508; [2] гл. 20, стор. 560–579).

**Опір матеріалів при напруженнях, що змінюються в часі.** Явище втоми матеріалів. Границя витривалості і методи її визначення. Крива втоми. Розрахунок на міцність при циклічній зміні напружень ([1] гл. 21, стор. 562–589; [2] гл. 22, стор. 652–682).

**Розрахунки при ударних навантаженнях.** Технічна теорія удару. Розрахунок стержнів при осьовій і згинальній дії удару. Ударна в'язкість матеріалу та її визначення ([1] гл. 22, стор. 590–612; [2] гл. 23, стор. 690–716).

## **ЗМІСТ ЗАДАЧ ТА ВИХІДНІ ДАНІ**

**Задача 1.** Розрахунок статично визначуваної балки при плоскому згинанні

Для розрахунку на згин сталевий, статично визначуваної балки незмінної за довжиною поперечного перерізу, на яку діє плоска система сил, необхідно:

1) визначити реактивні зусилля опор;  
2) скласти вирази для перерізуючої сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  та побудувати їх епюри;

3) встановити положення небезпечних перерізів, визначити в них величини напружень  $\sigma$  і  $\tau$  для характерних точок при заданій круглій формі поперечного перерізу діаметром  $D$  та побудувати епюри цих напружень;

4) користуючись енергетичною теорією міцності, визначити найбільш напружену точку в небезпечних перерізах і виконати перевірку міцності;

5) із умови міцності за нормальними напруженнями підібрати номер профілю катаної двотаврової балки за сортаментом ГОСТ 8239-89 та діаметр  $D_1$  круглого перерізу і порівняти погонну масу балок із різними типами поперечних перерізів;

6) методом початкових параметрів визначити прогин  $w$  посередині довжини балки та кут повороту  $\theta$  правого кінцевого поперечного перерізу круглої форми при заданому діаметрі  $D$ .

*Рекомендована література:* [1], [2] – §§ 17–21, 60–62, 64, 66–68; [9] – §§ 7.1–7.7, 7.10, 7.13, 7.14.

**Задача 2.** Розрахунок круглого вала при складному опорі

Для заданого сталевий вала із незмінним діаметром необхідно:

1) скласти розрахункові схеми і визначити зусилля, які діють на вал;

2) для кожної розрахункової схеми визначити внутрішні силові фактори на окремих ділянках вала і побудувати їх епюри;

3) встановити положення небезпечного перерізу та визначити необхідний діаметр вала  $D$  із умови міцності без урахування перерізуючих сил, користуючись енергетичною теорією формозміни;

4) визначити в небезпечному перерізі величини всіх компонентів напружень  $\sigma$  і  $\tau$  в характерних точках, побудувати їх епюри і виконати повну перевірку міцності вала за енергетичною теорією формозміни.

*Рекомендована література:* [1], [2] – §§16–21, 75, 77; [9] – §§7.1–7.7, 9.1, 9.4, 9.5.

**Задача 3.** Розрахунок статично невизначуваної балки при плоскому згині

Для розрахунку на міцність заданої сталевий балки, що знаходиться під дією плоскої системи сил, необхідно:

1) розкрити статичну невизначуваність, користуючись рівняннями трьох моментів;

2) скласти вирази перерізуючої сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  для окремих прогонів і побудувати їх епюри;

3) зобразити наближено положення осі балки в деформованому стані;

4) встановити положення небезпечного перерізу та із умови міцності за нормальними напруженнями підібрати номер профілю катаної двотаврової балки за сортаментом ГОСТ 8239-89;

5) визначити величини напружень  $\sigma$  і  $\tau$  в характерних точках по висоті небезпечного перерізу та побудувати їх епюри.

*Рекомендована література:* [1], [2] – §§17–21, 60–62, 64, 93; [9] – §§7.1–7.7, 7.15.

**Задача 4.** Проектування стержня за умови стійкості

Сталевий стержень довжиною  $l$  стискається центрально прикладеною силою  $P$ . Вважаючи, що вказані на схемі закріплення однакові в обох площинах  $xoy$  і  $xoz$ , підібрати поперечний переріз стержня заданої форми при відомих марці сталі і допустимому на міцність напруженні  $[\sigma]$ .

*Рекомендована література:* [1] – §§116–128, 120, 121; [2] – §§125–127, 129, 130; [9] – §§13.1, 13.2, 13.4.

Таблиця 1. Типи розрахункових схем до задач 1 і 2

Тип схеми	Задача 1	Задача 2
А		
Б		
В		
Г		
Д		
Е		
Ж		
И		



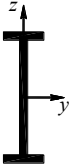
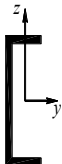
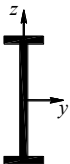
Таблиця 2. Типи розрахункових схем до задач 3 і 4

Тип схеми	Задача 3	Задача 4
А		
Б		
В		
Г		
Д		
Е		
Ж		
И		

Таблиця 3. Вихідні дані до задач 1 і 2

Вариант	Задача 1									Задача 2									
	$c_p = \bar{c}_p \cdot a; c_M = \bar{c}_M \cdot a; c_q = \bar{c}_q \cdot a$									$[\sigma] = 180 \text{ МПа}$									
	$a, \text{ м}$	$\bar{c}_p$	$\bar{c}_M$	$\bar{c}_q$	$D, \text{ м}$	$P_1, \text{ кН}$	$M_1, \text{ кН·м}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$a, \text{ м}$	$D_1, \text{ м}$	$D_2, \text{ м}$	$G_1, \text{ кН}$	$G_2, \text{ кН}$	$T_1, \text{ кН}$	$t_1, \text{ кН}$	$T_2, \text{ кН}$	$t_2, \text{ кН}$		
1	1,1	0,5	1,0	0,5	0,15	15	20	10	0,45	0,40	0,20	0,30	0,15	1,5	0,5	3,0	1,0		
2	1,1	0,5	1,0	1,0	0,15	14	20	11	0,44	0,40	0,20	0,31	0,16	1,5	0,5	3,0	1,0		
3	1,1	0,5	1,0	1,5	0,15	13	21	12	0,43	0,40	0,20	0,32	0,16	1,5	0,5	3,0	1,0		
4	1,1	0,5	1,0	2,0	0,15	12	21	13	0,42	0,40	0,20	0,33	0,17	1,5	0,5	3,0	1,0		
5	1,1	0,5	1,0	0,5	0,15	13	22	14	0,41	0,40	0,20	0,34	0,17	1,5	0,5	3,0	1,0		
6	1,1	0,5	1,0	1,0	0,15	14	22	15	0,40	0,40	0,20	0,35	0,18	1,5	0,5	3,0	1,0		
7	1,1	0,5	1,0	1,5	0,15	15	23	14	0,39	0,40	0,20	0,36	0,18	1,5	0,5	3,0	1,0		
8	1,1	0,5	1,0	2,0	0,15	14	23	13	0,38	0,40	0,20	0,37	0,19	1,5	0,5	3,0	1,0		
9	1,2	0,5	1,0	0,5	0,16	13	24	12	0,37	0,40	0,20	0,38	0,19	1,5	0,5	3,0	1,0		
10	1,2	0,5	1,0	1,0	0,16	12	24	11	0,36	0,40	0,20	0,39	0,20	1,5	0,5	3,0	1,0		
11	1,2	1,0	0,5	1,5	0,16	13	25	10	0,35	0,30	0,15	0,40	0,20	2,0	0,5	4,0	1,0		
12	1,2	1,0	0,5	2,0	0,16	14	25	11	0,36	0,30	0,15	0,41	0,21	2,0	0,5	4,0	1,0		
13	1,2	1,0	0,5	0,5	0,16	15	26	12	0,37	0,30	0,15	0,42	0,21	2,0	0,5	4,0	1,0		
14	1,2	1,0	0,5	1,0	0,16	14	26	13	0,38	0,30	0,15	0,43	0,22	2,0	0,5	4,0	1,0		
15	1,2	1,0	0,5	1,5	0,16	13	27	14	0,39	0,30	0,15	0,44	0,22	2,0	0,5	4,0	1,0		
16	1,2	1,0	0,5	2,0	0,16	12	27	15	0,40	0,30	0,15	0,45	0,23	2,0	0,5	4,0	1,0		
17	1,3	1,0	0,5	0,5	0,17	13	28	14	0,41	0,30	0,15	0,46	0,23	2,0	0,5	4,0	1,0		
18	1,3	1,0	0,5	1,0	0,17	14	28	13	0,42	0,30	0,15	0,47	0,24	2,0	0,5	4,0	1,0		
19	1,3	1,0	0,5	1,5	0,17	15	29	12	0,43	0,30	0,15	0,48	0,24	2,0	0,5	4,0	1,0		
20	1,3	1,0	0,5	2,0	0,17	14	29	11	0,44	0,30	0,15	0,49	0,25	2,0	0,5	4,0	1,0		
21	1,3	1,5	1,0	0,5	0,17	13	30	10	0,45	0,50	0,25	0,50	0,25	1,5	0,5	3,0	1,0		
22	1,3	1,5	1,0	1,0	0,17	12	30	11	0,44	0,50	0,25	0,30	0,15	1,5	0,5	3,0	1,0		
23	1,3	1,5	1,0	1,5	0,17	13	29	12	0,43	0,50	0,25	0,31	0,16	1,5	0,5	3,0	1,0		
24	1,3	1,5	1,0	2,0	0,17	14	29	13	0,42	0,50	0,25	0,32	0,16	1,5	0,5	3,0	1,0		
25	1,4	1,5	1,0	0,5	0,18	15	28	14	0,41	0,50	0,25	0,33	0,17	1,5	0,5	3,0	1,0		
26	1,4	1,5	1,0	1,0	0,18	14	28	15	0,40	0,50	0,25	0,34	0,17	1,5	0,5	3,0	1,0		
27	1,4	1,5	1,0	1,5	0,18	13	27	14	0,39	0,50	0,25	0,35	0,18	1,5	0,5	3,0	1,0		
28	1,4	1,5	1,0	2,0	0,18	12	27	13	0,38	0,50	0,25	0,36	0,18	1,5	0,5	3,0	1,0		
29	1,4	1,5	1,0	0,5	0,18	13	26	12	0,37	0,50	0,25	0,37	0,19	1,5	0,5	3,0	1,0		
30	1,4	1,5	1,0	1,0	0,18	14	26	11	0,36	0,50	0,25	0,38	0,19	1,5	0,5	3,0	1,0		

Таблиця 4. Вихідні дані до задач 3 і 4

Вариант	Задача 3								Задача 4					Профіль
	$a, \text{ м}$	$\bar{c}_p$	$\bar{c}_M$	$\bar{c}_q$	$P_1, \text{ кН}$	$M_1, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$[\sigma], \text{ МПа}$	Марка сталі	$[\sigma], \text{ МПа}$	$l, \text{ м}$	$P, \text{ кН}$		
1	1,0	0,25	0,5	0,25	20	30	10	160	Ст 5	200	2,0	550	 ГОСТ 8239-89	
2	1,0	0,5	0,5	0,25	19	29	10	160	Ст 4	180	2,1	560		
3	1,0	0,75	0,5	0,25	18	28	10	160	Ст 3	160	2,2	570		
4	1,0	0,25	0,5	0,25	17	27	10	160	Ст 5	200	2,3	560		
5	1,0	0,5	0,5	0,75	16	26	10	160	Ст 4	180	2,4	590		
6	1,0	0,75	0,5	0,75	15	25	11	160	Ст 3	160	2,5	600		
7	1,0	0,25	0,5	0,75	14	24	11	160	Ст 5	200	2,6	560		
8	1,0	0,5	0,5	0,25	13	23	11	160	Ст 4	180	2,7	570		
9	1,0	0,75	0,5	0,25	12	22	11	160	Ст 3	160	2,8	580		
10	1,0	0,25	0,5	0,25	11	21	11	160	Ст 5	200	2,9	590		
11	1,1	0,5	0,25	0,25	10	20	12	180	Ст 4	180	3,0	300	 ДСТУ 3438-96 (ГОСТ 8240-97)	
12	1,1	0,75	0,25	0,25	11	21	12	180	Ст 3	160	2,9	310		
13	1,1	0,25	0,25	0,5	12	22	12	180	Ст 5	200	2,8	320		
14	1,1	0,5	0,25	0,5	13	23	12	180	Ст 4	180	2,7	330		
15	1,1	0,75	0,25	0,5	14	24	12	180	Ст 3	160	2,6	340		
16	1,1	0,25	0,25	0,75	15	25	13	180	Ст 5	200	2,5	350		
17	1,1	0,5	0,25	0,75	16	26	13	180	Ст 4	180	2,4	360		
18	1,1	0,75	0,25	0,75	17	27	13	180	Ст 3	160	2,3	370		
19	1,1	0,25	0,25	0,5	18	28	13	180	Ст 5	200	2,2	380		
20	1,1	0,5	0,25	1,0	19	29	13	180	Ст 4	180	2,1	390		
21	1,2	0,75	0,75	0,25	20	30	14	200	Ст 3	160	2,0	600	 ГОСТ 8239-89	
22	1,2	0,25	0,75	1,0	19	29	14	200	Ст 5	200	2,1	590		
23	1,2	0,5	0,75	1,0	18	28	14	200	Ст 4	180	2,2	580		
24	1,2	0,75	0,75	0,5	17	27	14	200	Ст 3	160	2,3	570		
25	1,2	0,25	0,75	1,0	16	26	14	200	Ст 5	200	2,4	560		
26	1,2	0,5	0,75	1,0	15	25	15	200	Ст 4	180	2,5	550		
27	1,2	0,75	0,75	0,25	14	24	15	200	Ст 3	160	2,6	540		
28	1,2	0,25	0,75	1,0	13	23	15	200	Ст 5	200	2,7	530		
29	1,2	0,5	0,75	1,0	12	22	15	200	Ст 4	180	2,8	520		
30	1,2	0,75	0,75	0,5	11	21	15	200	Ст 3	160	2,9	510		

## **ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ**

### **Задача 1. Розрахунок статично визначуваної балки при плоскому згинанні**

Для сталеві, статично визначуваної балки незмінного поперечного перерізу, на яку діє плоска система сил, необхідно:

1) визначити реактивні зусилля опор;  
2) скласти вирази для перерізуючої сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  та побудувати їх епюри;

3) встановити положення небезпечних перерізів, визначити в них величини напружень  $\sigma$  і  $\tau$  для характерних точок при заданій круглій формі поперечного перерізу діаметром  $D$  та побудувати епюри цих напружень;

4) користуючись енергетичною теорією міцності, визначити найбільш напружену точку в небезпечних перерізах і виконати перевірку міцності;

5) із умови міцності за нормальними напруженнями підібрати номер профілю катаної двотаврової балки за ГОСТ 8239-89 та діаметр  $D_1$  круглого перерізу і порівняти погонну масу балок з різними типами поперечних перерізів;

6) методом початкових параметрів визначити прогин  $w$  посередині довжини балки із поперечним перерізом круглої форми при заданому діаметрі  $D$  та розрахувати кут повороту  $\theta$  на правому її кінці.

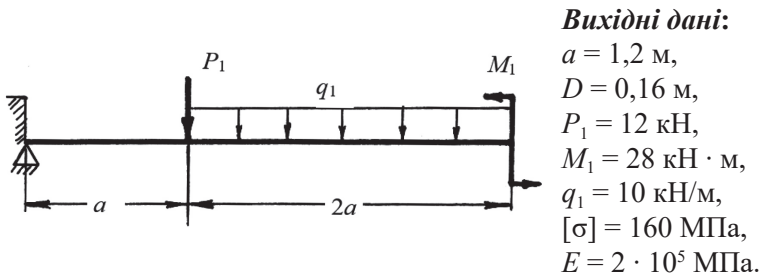


Рис. 1. Задана розрахункова схема балки

Рішення:

1. Визначення реакцій опор

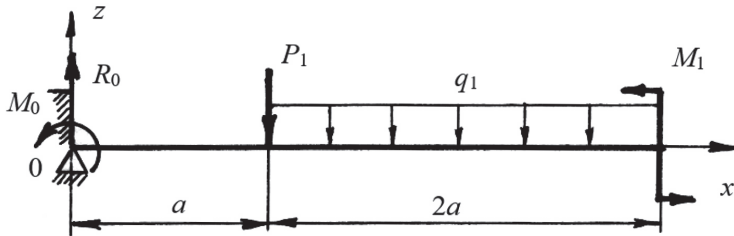


Рис. 2. Схема діючих на балку зусиль

У лівому кінцевому перерізі балки при заданому типі опорного пристрою (жорстке нерухоме затиснення) виникає два реактивні зусилля: реактивна сила  $R_0$  і реактивний момент  $M_0$  (рис. 2), які можна визначити з двох рівнянь статичної рівноваги:

1) сума проєкцій усіх сил на будь-яку вісь (в даному випадку вертикальну вісь  $z$ ) дорівнює 0:

$$\sum P_z = 0: \quad R_0 - P_1 - q_1 \cdot 2a = 0,$$

$$\text{звідки } R_0 = P_1 + 2q_1 a = 12 + 2 \cdot 10 \cdot 1,2 = 36;$$

2) сума проєкцій усіх моментів в площині навколо будь-якої точки (наприклад точки 0) дорівнює 0:

$$\sum M_{y,0} = 0: \quad M_0 - P_1 a - q_1 \cdot 2a \cdot 2a + M_1 = 0,$$

$$\text{звідки } M_0 = P_1 a + 4q_1 a^2 - M_1 =$$

$$= 12 \cdot 1,2 + 4 \cdot 10 \cdot 1,2^2 - 28 = 44 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Так як визначені реактивні зусилля  $R_0$  і  $M_0$  є додатними, то їх напрямок залишається таким, як вказано на рис. 2.

2. Складання виразів для перерізуючої сили  $Q$  та згинального моменту  $M$  і побудова їх епюр

Вирази для величин  $Q$  і  $M$  складаємо для окремих ділянок, виходячи із умов рівноваги для лівої відсіченої частини балки і прийнятого правила знаків.

Ділянка I ( $0 \leq x < a$ ):  $Q_I(x) = R_0$ ;  $M_I(x) = -M_0 + R_0 \cdot x$ .

При  $x = 0$ :  $Q_I = R_0 = 36$  кН;  $M_I = -M_0 = -44$  кН · м.

При  $x = a$ :  $Q_I = R_0 = 36$  кН;  $M_I = -M_0 + R_0 a =$   
 $= -44 + 36 \cdot 1,2 = -0,8$  кН · м.

Ділянка II ( $a \leq x < 3a$ ):  $Q_{II}(x) = R_0 - P_1 - q_1(x - a)$ ;

$$M_{II}(x) = -M_0 + R_0 x - P_1(x - a) - q_1(x - a) \frac{x - a}{2}.$$

При  $x = a$ :  $Q_{II} = R_0 - P_1 = 36 - 12 = 24$  кН;

$$M_{II} = -M_0 + R_0 \cdot a = -44 + 36 \cdot 1,2 = -0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $x = 3a$ :  $Q_{II} = R_0 - P_1 - q_1 \cdot 2a = 36 - 12 - 10 \cdot 2 \cdot 1,2 = 0$ ;

$$M_{II} = -M_0 + R_0 \cdot 3a - P_1 \cdot 2a - q_1 \frac{(2a)^2}{2} =$$

$$= -44 + 36 \cdot 3 \cdot 1,2 - 12 \cdot 2 \cdot 1,2 - 10 \frac{4 \cdot 1,2^2}{2} = 28 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

За даними розрахунків будемо епюри  $Q$  і  $M$ , враховуючи закон їх зміни на ділянках, (рис. 3).

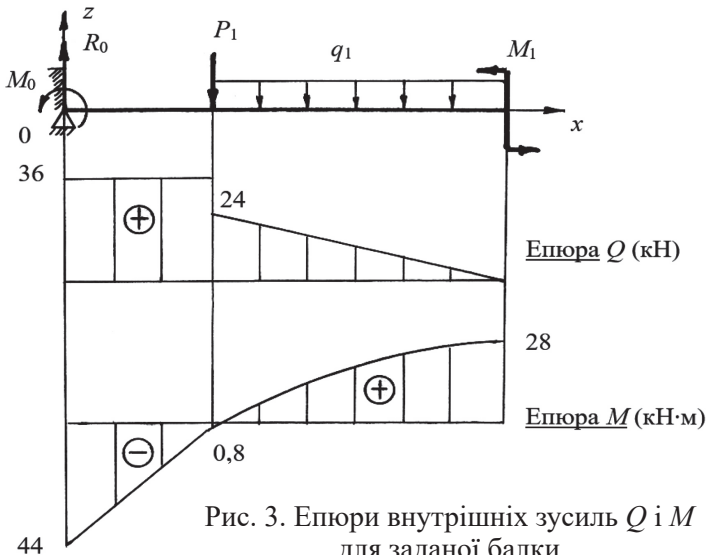


Рис. 3. Епюри внутрішніх зусиль  $Q$  і  $M$  для заданої балки

3. Встановлення положення небезпечного перерізу і побудова епюр  $\sigma$  і  $\tau$

Аналізуючи епюри  $Q$  і  $M$  (див. рис. 3), бачимо, що небезпечним є переріз  $x = 0$ , де  $M_{\max} = -44 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $Q_{\max} = 36 \text{ кН}$ .

Максимальні нормальні і дотичні напруження в круглому поперечному перерізі визначаються за формулами

$$\sigma_{\max} = \mp \frac{M_{\max}}{W_o}; \quad \tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_{\max}}{F_o},$$

де осьовий момент опору  $W_o$  і площа поперечного перерізу  $F_o$  дорівнюють:

$$W_o = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,16^3}{32} = 4,019 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$F_o = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,16^2}{4} = 0,0201 \text{ м}^2.$$

Тоді

$$\sigma_{\max} = \mp \frac{-44 \cdot 10^3}{4,019 \cdot 10^{-4}} = \pm 109,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{36 \cdot 10^3}{0,0201} = 2,4 \text{ МПа}.$$

Епюри нормальних і дотичних напружень за даними розрахунків представлені на рис. 4.

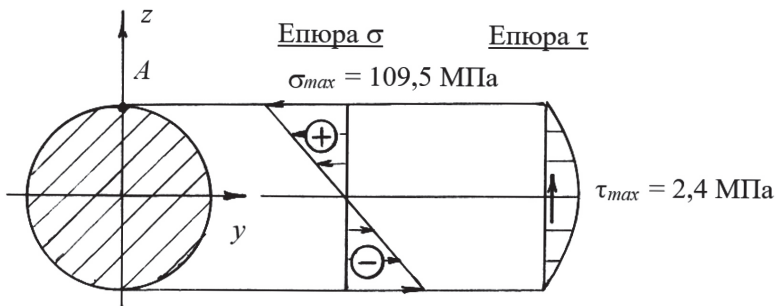


Рис. 4. Епюри нормальних  $\sigma$  і дотичних  $\tau$  напружень в небезпечному перерізі

4. Перевірка міцності за енергетичною теорією формозміни  
Умова міцності має вигляд  $\sigma_{\text{екв. IV}} \leq [\sigma] = 160$  МПа, де  
 $\sigma_{\text{екв. IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ .

Аналіз епюр  $\sigma$  і  $\tau$  (рис. 4) показує, що найбільш напруженою є точка А.

$$\text{Тоді маємо } \sigma_{\text{екв. IV}}^{(A)} = \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2} = 109,5 \text{ МПа.}$$

Так як  $109,5 \text{ МПа} < 160 \text{ МПа}$  – умова міцності виконується.

5. Підбір із умови міцності діаметру круглого і профілю таврового перерізу

Умова міцності за нормальними напруженнями має вигляд  $\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma]$  або  $\frac{M_{\text{max}}}{W} \leq [\sigma]$ , звідки необхідний осьовий момент опору

$$W \geq \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{44 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 275 \text{ см}^3.$$

За ГОСТ 8239-89 вибираємо двотаврову балку № 24 з моментом опору відносно горизонтальної осі  $W_T = 289 \text{ см}^3$ . Площа поперечного перерізу  $F_T = 34,8 \text{ см}^2$ , погонна маса профілю  $m_T = 27,3 \text{ кг/м}$ .

Із формули для осьового моменту опору круглого перерізу маємо:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 275}{3,14}} = 14,1 \text{ см} = 0,141 \text{ м.}$$

Визначений діаметр необхідно привести до стандартного значення у відповідності до ГОСТ 6636-69. Необхідний діаметр бажано округляти в сторону збільшення, але обґрунтований вибір дещо зменшеного розміру, якщо це не призводить до перевантаження більше 1,5–2 % є також припустимим.

Вибираємо діаметр 140 мм з розмірного ряду Ra20 (ГОСТ 6636-69).

$$F_o = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 14,0^2}{4} = 154 \text{ см}^2.$$

Відношення погонних мас балок з круглим і тавровим поперечними перерізами визначається як  $\frac{m_o}{m} = \frac{F_o}{F} = \frac{154}{34,8} = 4,43$ .



Таким чином, балка з круглим перерізом є важчою майже в 4,5 рази.

6. Визначення методом початкових параметрів величин прогину  $w(1,5a)$  та кута повороту  $\theta(3a)$  балки заданого діаметра  $D$

Для визначення величин прогину і кута повороту в заданих точках  $B$  і  $D$  (рис. 5) скористуємося загальними формулами методу початкових параметрів, які для заданої балки приймають вигляд:

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - P_1 \frac{(x-b)^3}{6} - q_1 \frac{(x-c)^4}{24} \right];$$

$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} - P_1 \frac{(x-b)^2}{2} - q_1 \frac{(x-c)^3}{6} \right].$$

Початкові параметри це прогин, кут повороту, момент і сила в перерізі  $x = 0$ :

$$w_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad M_0 = -44 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad Q_0 = 36 \text{ кН}.$$

Для деяких розрахункових схем, якщо опори, які обмежують кут повороту і прогини балки, знаходяться не в початковому перерізі ( $x \neq 0$ ), необхідно скласти і вирішити рівняння методу початкових параметрів відносно  $w_0$  і  $\theta_0$ , підставляючи замість  $x$  координати точок відповідних опор.

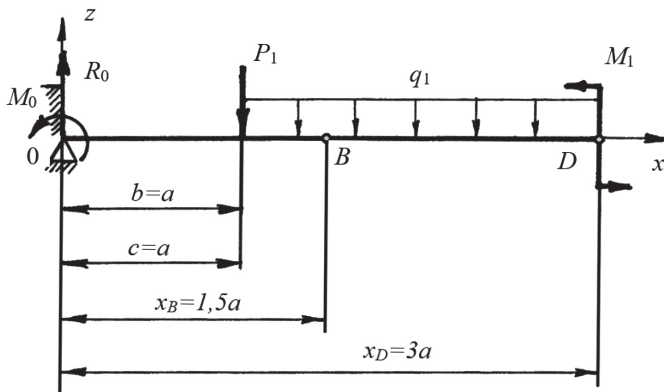


Рис. 5. Розрахункова схема балки

Визначаємо жорсткість при згині для заданого круглого перерізу

$$EJ = E \frac{\pi D^4}{64} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,16^4}{64} = 6,43 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

і розраховуємо прогин і кут повороту у вказаних точках  $B$  і  $D$ :

$$w_B(1,5a) = 0 + 0 \cdot 1,5 \cdot 1,2 + \frac{10^3}{6,43 \cdot 10^6} \times \left[ -44 \frac{(1,5 \cdot 1,2)^2}{2} + 36 \frac{(1,5 \cdot 1,2)^3}{6} - 12 \frac{(1,5 \cdot 1,2 - 1,2)^3}{6} - 10 \frac{(1,5 \cdot 1,2 - 1,2)^4}{24} \right] = -0,0057 \text{ м};$$

$$\theta_D(3a) = 0 + \frac{10^3}{6,43 \cdot 10^6} \times \left[ -44 \cdot 3 \cdot 1,2 + 36 \frac{(3 \cdot 1,2)^2}{2} - 12 \frac{(3 \cdot 1,2 - 1,2)^2}{2} - 10 \frac{(3 \cdot 1,2 - 1,2)^3}{6} \right] = 0,0027 \text{ рад.}$$

## Задача 2. Розрахунок круглого вала при складному опорі

Для заданого сталевого вала із незмінним діаметром необхідно:

1) скласти розрахункові схеми і визначити зусилля, які діють на вал;

2) для кожної розрахункової схеми визначити внутрішні силові фактори на окремих ділянках вала і побудувати їх епюри;

3) встановити положення небезпечного перерізу та визначити необхідний діаметр вала  $D$  із умови міцності без урахування перерізуючих сил, користуючись енергетичною теорією формозміни;

4) визначити в небезпечному перерізі величини всіх компонентів напружень  $\sigma$  і  $\tau$  в характерних точках, побудувати їх епюри і виконати повну перевірку міцності вала за енергетичною теорією формозміни.

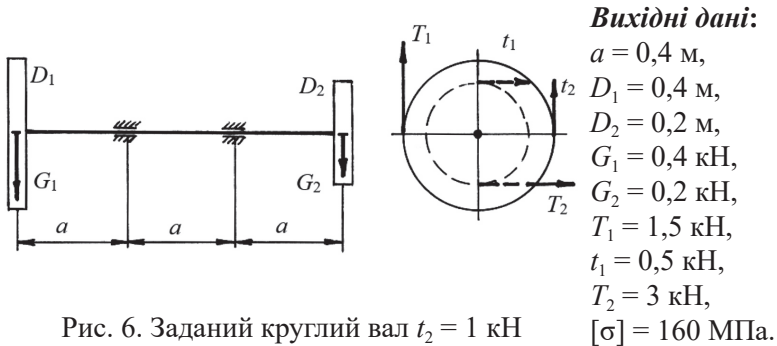


Рис. 6. Заданий круглий вал  $t_2 = 1 \text{ кН}$

**Рішення:**

1. Складання розрахункових схем і визначення діючих на вал зовнішніх зусиль

Приводимо діючі в шківках сили  $T_1$  і  $t_1$  та  $T_2$  і  $t_2$  відповідно до сили  $P_{1z}$  і крутного моменту  $M_{1кр}$  та сили  $P_{2y}$  і крутного моменту  $M_{2кр}$ , як показано на рис. 7.

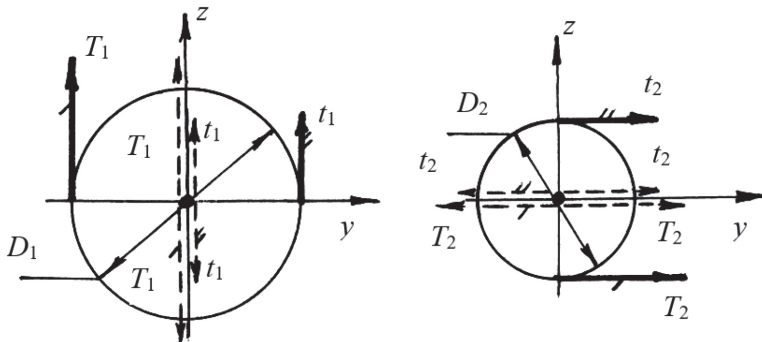


Рис. 7. Зведення шківових сил до зосередженої сили і крутного моменту

Відповідно до представлених схем шківових зусиль шукані сили  $P_{1z}$  і  $P_{2y}$  та моменти  $M_{1кр}$  і  $M_{2кр}$  визначаються за формулами:

$$P_{1z} = T_1 + t_1 = 1,5 + 0,5 = 2 \text{ кН};$$

$$M_{\text{кр}} = \frac{D_1}{2}(T_1 - t_1) = \frac{0,4}{2}(1,5 - 0,5) = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$P_{2Y} = T_2 + t_2 = 3 + 1 = 4 \text{ кН};$$

$$M_{2\text{кр}} = -\frac{D_2}{2}(T_2 - t_2) = -\frac{0,2}{2}(3 - 1) = -0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Тоді, з урахуванням сил тяжіння  $G_1$  і  $G_2$ , діючі на вал сили (рис. 8, а) можна представити як на розрахунковій схемі (рис. 8, б). Так як вал є статично визначуваним, то реактивні сили в підшипниках визначимо із умов рівноваги.

#### *Згинання в площині XOZ*

Визначаємо реактивні сили в підшипниках  $R_{AZ}$  і  $R_{BZ}$  із умов рівноваги (див. рис. 8, б):

$$\sum M_{AY} = 0: P_{1Z} \cdot a - G_1 \cdot a - R_{BZ} \cdot a + G_2 \cdot 2a = 0,$$

$$\text{звідки } R_{BZ} = P_{1Z} - G_1 + 2G_2 = 2 - 0,4 + 2 \cdot 0,2 = 2 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{BY} = 0: P_{1Z} \cdot 2a - G_1 \cdot 2a + R_{AZ} \cdot a + G_2 \cdot a = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{звідки } R_{AZ} &= -2P_{1Z} + 2G_1 - G_2 = \\ &= -2 \cdot 2 + 2 \cdot 0,4 - 0,2 = -3,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\text{Перевірка: } \sum P_Z = 0: P_{1Z} - G_1 + R_{AZ} + R_{BZ} - G_2 = 0;$$

$$2 - 0,4 - 3,4 + 2 - 0,2 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

*Висновок:* реактивні сили  $R_{AZ}$  і  $R_{BZ}$  визначені правильно.

#### *Згинання в площині YOZ*

Визначаємо реактивні сили в підшипниках  $R_{AY}$  і  $R_{BY}$  із умов рівноваги (див. рис. 8, б):

$$\sum M_{AZ} = 0: R_{BY} \cdot a - P_{2Y} \cdot 2a = 0,$$

$$\text{звідки } R_{BY} = -2P_{2Y} = -2 \cdot 4 = -8 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{BZ} = 0: -R_{AY}a + P_{2Y} \cdot a = 0,$$

$$\text{звідки } R_{AY} = P_{2Y} = 4 \text{ кН}.$$

$$\text{Перевірка: } \sum P_Y = 0: R_{AY} + R_{BY} + P_{2Y} = 0, 4 - 8 + 4 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

*Висновок:* реактивні сили  $R_{AY}$  і  $R_{BY}$  знайдені правильно.

Кручення навколо осі  $OX$

$$\sum M_X = 0: \quad M_{1кр} + M_{2кр} = 0; \quad 0,2 - 0,2 = 0;$$

$$0 \equiv 0,$$

умова рівноваги виконується.

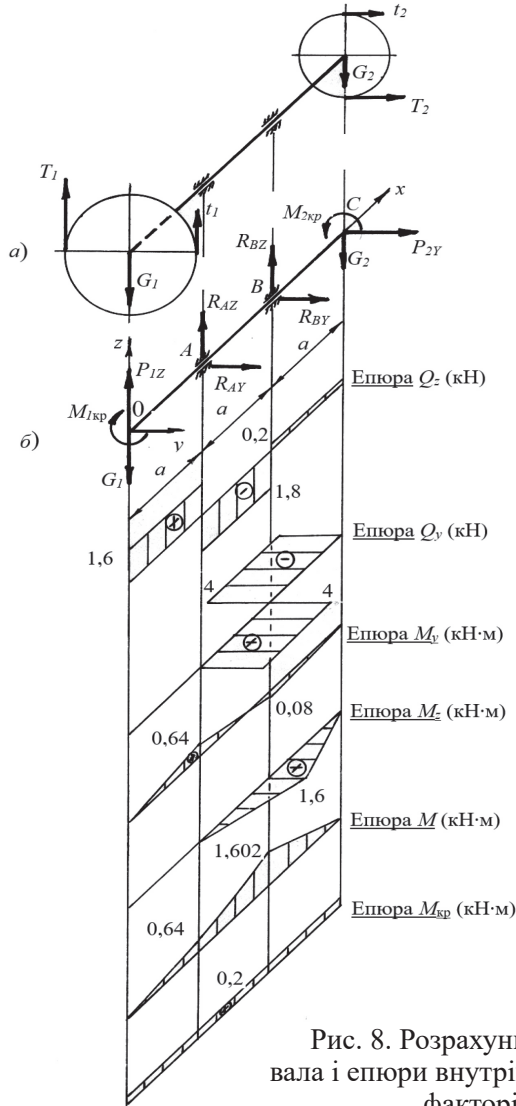


Рис. 8. Розрахункова схема вала і епюри внутрішніх силових факторів

2. Визначення внутрішніх силових факторів і побудова їх епюр

*Згинання в площині XOZ*

Ділянка  $0 \leq x < a$ :  $Q_Z = P_{1Z} - G_1$ ;  $M_Y = P_{1Z}x - G_1x$ .

При  $x = 0$ :  $Q_Z = 2 - 0,4 = 1,6$  кН;  $M_Y = 0$ .

При  $x = a$ :  $Q_Z = 2 - 0,4 = 1,6$  кН;

$M_Y = 2 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 0,4 = 0,64$  кН · м.

Ділянка  $a \leq x < 2a$ :  $Q_Z = P_{1Z} - G_1 + R_{AZ}$ ;  $M_Y = P_{1Z}x - G_1x + R_{AZ}(x - a)$ .

При  $x = a$ :  $Q_Z = 2 - 0,4 - 3,4 = -1,8$  кН;

$M_Y = 2 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 0,4 = 0,64$  кН · м.

При  $x = 2a$ :  $Q_Z = 2 - 0,4 - 3,4 = -1,8$  кН;

$M_Y = 2 \cdot 2 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 2 \cdot 0,4 + (-3,4) \cdot 0,4 = -0,08$  кН · м.

Ділянка  $2a \leq x < 3a$ :  $Q_Z = P_{1Z} - G_1 + R_{AZ} + R_{BZ}$ ;

$M_Y = P_{1Z} \cdot x - G_1 \cdot x + R_{AZ} \cdot (x - a) + R_{BZ} \cdot (x - 2a)$ .

При  $x = 2a$   $Q_Z = 2 - 0,4 - 3,4 + 2 = 0,2$  кН;

$M_Y = 2 \cdot 2 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 2 \cdot 0,4 + (-3,4) \cdot 0,4 = -0,08$  кН · м.

При  $x = 3a$   $Q_Z = 2 - 0,4 - 3,4 + 2 = 0,2$  кН;

$M_Y = 2 \cdot 3 \cdot 0,4 - 0,4 \cdot 3 \cdot 0,4 - 3,4 \cdot 2 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,4 = 0$ .

*Згинання в площині XOY*

Ділянка  $0 \leq x < a$ :  $Q_Y = 0$ ;  $M_Z = 0$ .

Ділянка  $a \leq x < 2a$ :  $Q_Y = R_{AY}$ ;  $M_Z = R_{AY}(x - a)$ .

При  $x = a$ :  $Q_Y = 4$  кН;  $M_Z = 0$ .

При  $x = 2a$ :  $Q_Y = 4$  кН;  $M_Z = 4 \cdot 0,4 = 1,6$  кН · м.

Ділянка  $2a \leq x < 3a$ :  $Q_Y = R_{AY} + R_{BY}$ ;  $M_Z = R_{AY}(x - a) + R_{BY}(x - 2a)$ .

При  $x = 2a$ :  $Q_Y = 4 - 8 = -4$  кН;  $M_Z = 4 \cdot 0,4 = 1,6$  кН · м.

При  $x = 3a$ :  $Q_Y = 4 - 8 = -4$  кН;  $M_Z = 4 \cdot 2 \cdot 0,4 - 8 \cdot 0,4 = 0$ .  
 Результируючий згинальний момент  $M$  визначається за формулою

$$M = \sqrt{M_Y^2 + M_Z^2}.$$

Тоді в точках  $O, A, B, C$  (див. рис. 8, б) маємо:

$$M_{(O)} = \sqrt{M_{(O)Y}^2 + M_{(O)Z}^2} = \sqrt{0 + 0} = 0;$$

$$M_{(A)} = \sqrt{M_{(A)Y}^2 + M_{(A)Z}^2} = \sqrt{0,64^2 + 0} = 0,64 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(B)} = \sqrt{M_{(B)Y}^2 + M_{(B)Z}^2} = \sqrt{(-0,08)^2 + (1,6)^2} = 1,602 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(C)} = \sqrt{M_{(C)Y}^2 + M_{(C)Z}^2} = \sqrt{0 + 0} = 0.$$

#### *Кручення навколо осі X*

Ділянка  $0 \leq x < 3a$ :  $M_X = M_{кр} = M_{1кр} = 0,2$  кН · м.

За даними розрахунків будуємо епюри (див. рис. 8).

3. Визначення положення небезпечного перерізу та необхідного діаметра вала  $D$

Проаналізував епюри, встановлюємо положення небезпечного перерізу при  $x = 2a$ . В цьому перерізі

$$M_Y = -0,08 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_Z = 1,6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M = 1,602 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{кр} = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_Z = -1,8 \text{ кН}; \quad Q_Y = \pm 4 \text{ кН}.$$

Умова міцності за енергетичною теорією формозміни має вигляд

$$\sigma_{екв.И'} = \frac{M_{зв}}{W_o} \leq [\sigma],$$

де осьовий момент опору  $W_o = \frac{\pi D^3}{32}$ .

Зведений момент

$$M_{зв} = \sqrt{M^2 + 0,75 M_{кр}^2} = \sqrt{(1,602)^2 + 0,75 \cdot 0,2^2} = 1,611 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Тоді з умови міцності маємо:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{зв}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,611 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0468 \text{ м} = 4,68 \text{ см.}$$

За ГОСТ 6636-69 (ряд Ra40) приймаємо  $D = 48 \text{ мм} = 0,048 \text{ м}$ . Розраховуємо основні геометричні характеристики круглого перерізу:

– площа перерізу  $F_o = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,048^2}{4} = 1,810 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;

– осьовий момент опору  $W_o = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,048^3}{32} = 1,086 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ ;

– момент інерції  $I_o = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 0,048^4}{64} = 2,606 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4$ ;

– полярний момент опору  $W_p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 0,048^3}{16} = 2,171 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$ .

4. Виконання повної перевірки міцності в небезпечному перерізі, побудова епюр нормальних і дотичних напружень  $\sigma$  і  $\tau$   
Визначаємо максимальні напруження в небезпечному перерізі:

найбільші нормальні напруження від згину:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_o} = \frac{1,602 \cdot 10^3}{1,086 \cdot 10^{-5}} = 147,5 \text{ МПа};$$

найбільші дотичні напруження від згину в площині  $XOZ$ :

$$\tau_{XZ \max} = \frac{4 Q_z}{3 F_o} = \frac{-4 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{3 \cdot 1,810 \cdot 10^{-3}} = -1,3 \text{ МПа};$$

найбільші дотичні напруження від згину в площині  $XOY$ :

$$\tau_{XY \max} = \frac{4 Q_y}{3 F_o} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^3}{3 \cdot 1,810 \cdot 10^{-3}} = 2,9 \text{ МПа};$$

найбільші дотичні напруження від кручення навколо осі  $X$ :

$$\tau_{кр \max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{0,2 \cdot 10^3}{2,171 \cdot 10^{-5}} = 9,2 \text{ МПа.}$$



Епюри вказаних напружень представлені на рис. 9. Нейтральна вісь перерізу буде перпендикулярна вектору сумарного згинального моменту, який є векторною сумою згинального моменту  $M_y$ , відкладеного по осі  $Z$  і згинального моменту  $M_z$ , відкладеного по осі  $Y$ . Найбільш напруженою буде точка на поверхні валу, в якій сягнуть максимуму нормальні напруження від результуючого згинального моменту. Як бачимо, такою точкою є точка  $K$  на нейтральній осі (в даному випадку справа, в залежності від комбінації напрямів напружень).

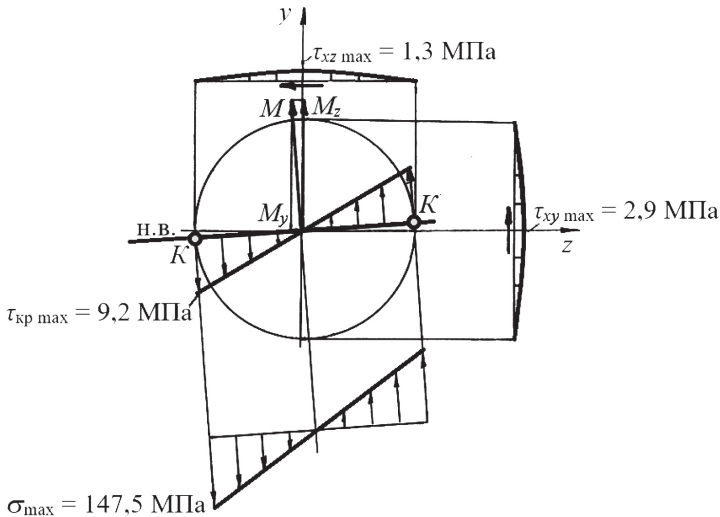


Рис. 9. Епюри напружень в небезпечному перерізі

Сумарні дотичні напруження в точці  $K$  будуть складатись з дотичних напружень від кручення і проєкцій дотичних напружень від згину в обох площинах на перпендикуляр до нейтральної осі, встановлений в точці  $K$ .

$$\tau^{(K)} = \bar{\tau}_{kp \max} + \bar{\tau}_{XY}^{\perp} + \bar{\tau}_{XZ}^{\perp} \approx \sqrt{\tau_{kp \max}^2 + \left(\frac{M_z}{M} \tau_{XY \max}\right)^2} + \left(\frac{M_y}{M} \tau_{XZ \max}\right)^2$$

$$\tau^{(K)} = \sqrt{9,2^2 + \left(\frac{1,6}{1,602} 2,9\right)^2} + \left(\frac{-0,08}{1,602} (-1,3)\right)^2 = 9,6 \text{ МПа.}$$

Умова міцності за енергетичною теорією формозміни:

$$\sigma_{екв IV}^{(K)} \leq [\sigma].$$

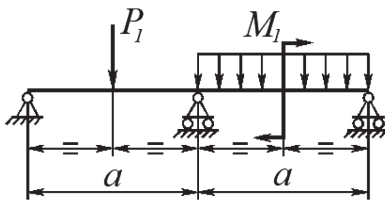
$$\sigma_{екв IV}^{(K)} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3\tau^2} = \sqrt{147,5^2 + 3 \cdot 9,6^2} = 148,4 < [\sigma] = 160 \text{ МПа,}$$

умова міцності виконується.

### Задача 3. Розрахунок статично невизначуваної балки при плоскому згинанні

Для заданої сталевої балки, що знаходиться під дією плоскої системи сил, необхідно:

- 1) розкрити статичну невизначуваність, користуючись рівняннями трьох моментів;
- 2) скласти вирази перерізуючої сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  для окремих прогонів і побудувати їх епюри;
- 3) зобразити наближено положення осі балки в деформованому стані;
- 4) встановити положення небезпечного перерізу та із умови міцності за нормальними напруженнями підібрати номер профілю катаної двотаврової балки за ГОСТ 8339-89;
- 5) визначити величини напружень  $\sigma$  і  $\tau$  в характерних точках по висоті небезпечного перерізу та побудувати їх епюри.



#### Вихідні дані:

$$\begin{aligned} a &= 1 \text{ м,} \\ P_1 &= 20 \text{ кН,} \\ M_1 &= 30 \text{ кН} \cdot \text{м,} \\ q_1 &= 10 \text{ кН/м,} \\ [\sigma] &= 160 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Рис. 10. Задана статично невизначувана балка

#### Рішення:

1. Розкриття статичної невизначуваності з використанням рівнянь теореми трьох моментів

Умовно розділимо задану балку на дві однопрогонові балки, взаємодію яких між собою на спільній проміжній опорі відобразимо опорними моментами  $M_2$  (рис. 11).

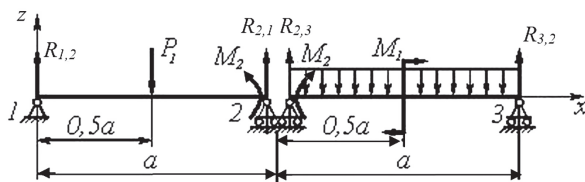


Рис. 11. Розрахункова схема балки

Невідомий опорний момент  $M_2$  знаходимо із умови сумісності кутових переміщень двох суміжних прогонів на опорі 2  $\theta_{2,1} = \theta_{2,3}$ , де кути повороту перерізів на цій опорі лівого і правого прогонів визначаються за табл. 1, с. 8 або за відповідними таблицями довідників [4; 11]:

$$\theta_{2,1} = \theta_{2,1}(P_1) + \theta_{2,1}(M_2) = \frac{P_1 a^2}{16EI} + \frac{M_2 a}{3EI};$$

$$\theta_{2,3} = \theta_{2,3}(M_2) + \theta_{2,3}(M_1) + \theta_{2,3}(q_1) = -\frac{M_2 a}{3EI} + \frac{M_1 a}{24EI} - \frac{q_1 a^3}{24EI}.$$

Тоді, за умовою сумісності кутів повороту:

$$\frac{P_1 a^2}{16EI} + \frac{M_2 a}{3EI} = -\frac{M_2 a}{3EI} + \frac{M_1 a}{24EI} - \frac{q_1 a^3}{24EI},$$

звідки, після множення на величину  $\left(\frac{3EI}{2a}\right)$ , отримаємо

$$M_2 = \frac{M_1}{16} - \frac{q_1 a^2}{16} - \frac{3P_1 a}{32} = \frac{30}{16} - \frac{10 \cdot 1^2}{16} - \frac{3 \cdot 20 \cdot 1}{32} = -0,625 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. Складання виразів для перерізувальної сили  $Q$  і згинального моменту  $M$  та побудова їх епюр

Визначимо реактивні сили на опорах (див. рис. 11):

$$R_1 = R_{1,2}; R_2 = R_{2,1} + R_{2,3}; R_3 = R_{3,2}.$$

Для лівого прогону умова рівноваги моментів відносно опори 1:

$$\sum M_1 = 0; -P_1 \frac{a}{2} + R_{2,1} \cdot a + M_2 = 0,$$

$$\text{звідки } R_{2,1} = \frac{P_1 \frac{a}{2} - M_2}{a} = \frac{20 \cdot 0,5 - (-0,625)}{1} = 10,625 \text{ кН}.$$

Умова рівноваги відносно опори 2:

$$\sum M_2 = 0; \quad -R_{1,2} \cdot a + P_1 \frac{a}{2} + M_2 = 0,$$

звідки  $R_{1,2} = \frac{P_1 \frac{a}{2} + M_2}{a} = \frac{20 \cdot 0,5 - 0,625}{1} = 9,375 \text{ кН}.$

Для правого прогону умова рівноваги моментів відносно опори 2:

$$\sum M_2 = 0; \quad -M_2 - q_1 \cdot a \frac{a}{2} - M_1 + R_{3,2} \cdot a = 0,$$

звідки  $R_{3,2} = \frac{q_1 \frac{a^2}{2} + M_1 + M_2}{a} = \frac{10 \cdot 0,5 + 30 - 0,625}{1} = 34,375 \text{ кН};$

а відносно опори 3:

$$\sum M_3 = 0; \quad -R_{2,3} \cdot a - M_2 - M_1 + q_1 \cdot a \frac{a}{2} = 0,$$

звідки  $R_{2,3} = \frac{-M_2 - M_1 + q_1 \frac{a^2}{2}}{a} = \frac{-(-0,625) - 30 + 10 \cdot 0,5}{1} = -24,375 \text{ кН}.$

Тоді маємо:  $R_1 = R_{1,2} = 9,375 \text{ кН};$

$$R_2 = R_{2,1} + R_{2,3} = 10,625 - 24,375 = -13,75 \text{ кН};$$

$$R_3 = R_{3,2} = 34,375 \text{ кН}.$$

Перевірка за умовою рівноваги сил:  $\sum P_z = 0:$

$$-P - q_1 \cdot a + R_1 + R_2 + R_3 = 0,$$

$$-20 - 10 \cdot 1 + 9,375 - 13,75 + 34,375 = 0,$$

$$0 \equiv 0.$$

*Висновок:* реакції опор визначені правильно.

### Складання виразів $Q$ і $M$

Ділянка  $0 \leq x < 0,5a$ :  $Q = R_1$ ;  $M = R_1x$ .

Ділянка  $0,5a \leq x < a$ :  $Q = R_1 - P_1$ ;  $M = R_1x - P_1(x - 0,5a)$ .

Ділянка  $a \leq x \leq 1,5a$ :  $Q = R_1 - P_1 + R_2 - q_1(x - a)$ ;

$$M = R_1x - P_1(x - 0,5a) + R_2(x - a) - q_1 \frac{(x - a)^2}{2}.$$

Ділянка  $1,5a \leq x < 2a$ :  $Q = R_1 - P_1 + R_2 - q_1(x - a)$ ;

$$M = R_1x - P_1(x - 0,5a) + R_2(x - a) - q_1 \frac{(x - a)^2}{2} + M_1.$$

Побудова епюр перерізуючих сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$

Обчислюючи за відповідними виразами по ділянках  $Q$  і  $M$  будемо епюри  $Q$  і  $M$  (рис. 12).

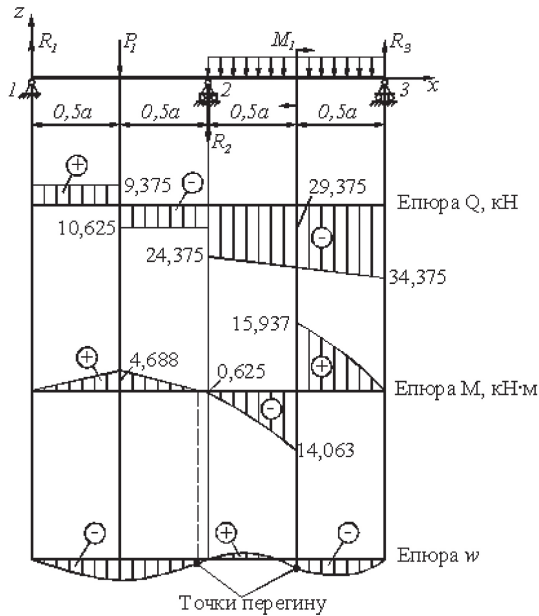


Рис. 12. Епюри  $Q$  і  $M$  та характер епюри  $w$

### 3. Зображення епюри прогинів $w$ (наближено)

Побудову епюри  $w$ , яка відображає положення осі балки в деформованому стані, виконуємо з урахуванням нульових переміщень опор та характеру епюри  $M$  (див. рис. 12). В перерізах, де  $M = 0$ , маємо точки перегину функції переміщення  $w$ .

4. Встановлення положення небезпечного перерізу і підбір номеру профілю двотаврової балки за сортаментом ГОСТ 8239-89.

Із аналізу епюр  $Q$  і  $M$  (див. рис. 12) випливає, що небезпечним є переріз при  $x = 1,5a$  (точка  $A$ ):  $M_{max} = 15,397$  кН · м,  $Q = -29,375$  кН.

Із умови міцності  $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ , де  $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}$ ,

$$\text{маємо } W = \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{15,937 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 9,96 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 99,6 \text{ см}^3.$$

За сортаментом ГОСТ 8239-89 приймаємо двотаврову балку № 16 з наступними характеристиками перерізу:

$$W = 109 \text{ см}^3 = 1,09 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$I = 873 \text{ см}^4 = 8,73 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$S = 62,3 \text{ см}^3 = 6,23 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

$$S_{ct} = 5 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}.$$

5. Визначення максимальних напружень  $\sigma_{max}$ ,  $\tau_{max}$  і побудова епюр  $\sigma$  і  $\tau$

Максимальні напруження визначаються за наступними формулами:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_{max}}{W} = \pm \frac{15,937}{1,09 \cdot 10^{-4}} = \pm 146,2 \text{ МПа},$$

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S}{I \cdot S_{ct}} = \frac{-29,375 \cdot 10^3 \cdot 6,23 \cdot 10^{-5}}{8,73 \cdot 10^{-6} \cdot 0,005} = -41,9 \text{ МПа}.$$

Епюри напружень показані на рис. 13.

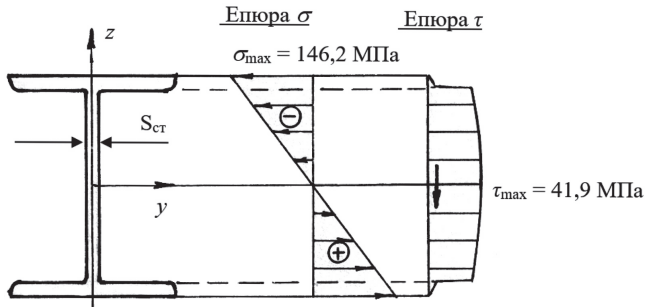


Рис. 13. Епюри зміни напружень  $\sigma$  і  $\tau$  за висотою двотаврового профілю

#### Задача 4. Проектування стержня за умови стійкості

Сталевий стержень завдовжки  $l$  має вказані на схемі закріплення і стискується центрально прикладеною силою  $P$ . Вважаючи, що закріплення однакове в обох площинах  $xoy$  і  $xoz$ , добрати поперечний переріз стержня із прокатного профілю заданої форми при відомій марці сталі і допустимому на міцність напруженні  $[\sigma]$ .

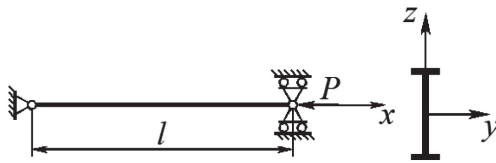


Рис. 14. Заданий стержень

#### Вихідні дані:

$l = 2$  м,  
 $P = 600$  кН,  
 $[\sigma] = 160$  МПа,  
 марка сталі – Ст3,  
 поперечний переріз – двотавр  
 (ГОСТ 8239-89)

#### Рішення:

1. Побудова умови практичного підбору поперечного перерізу стержня

Поперечний переріз стиснутого стержня добираємо з умови стійкості

$$\sigma \leq [\sigma_{кр}];$$

$$\sigma = P / F; [\sigma_{кр}] = \sigma_{кр} / k_{кр},$$

де  $\sigma$  – нормальне напруження в стояку, що стискується силою  $P$ ;  
 $[\sigma_{кр}]$  – допустиме напруження при втраті стійкості;

$\sigma_{кр}$  – критичне стискуюче напруження;  
 $F$  – площа поперечного перерізу стержня;  
 $k_{ст}$  – коефіцієнт запасу стійкості.

Враховуючи, що допустиме напруження  $[\sigma]$  зазвичай представляється як  $[\sigma] = \sigma_{т} / k_{т}$ , то відношення величин двох допустимих напружень буде таким:

$$\frac{[\sigma_{ст}]}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{кр} \cdot k_{т}}{\sigma_{т} \cdot k_{ст}} = \phi,$$

звідки можемо записати

$$[\sigma_{ст}] = \phi[\sigma],$$

де  $\sigma_{т}$  – границя плинності матеріалу;

$k_{т}$  – коефіцієнт запасу міцності;

$\phi$  – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при перевірці стійкості стержня.

Тоді із початкової умови стійкості отримаємо таку практичну формулу для підбору площі  $F$  поперечного перерізу стержня:

$$F \geq \frac{P}{\phi[\sigma]}.$$

Оскільки в цій умові дві невідомі величини  $F$  і  $\phi$  є залежними, то площу  $F$  визначаємо методом послідовних наближень.

## 2. Підбір поперечного перерізу стержня

Для першого наближення приймаємо  $\phi_1 = 0,6$ . Визначаємо необхідну площу поперечного перерізу:

$$F_1 = \frac{500 \cdot 10^3}{0,6 \cdot 160 \cdot 10^6} = 52,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 52,1 \text{ см}^2.$$

За сортаментом ГОСТ 8239-89 підбираємо двотавр № 33, з площею поперечного перерізу  $F = 53,8 \text{ см}^2$ , мінімальний радіус інерції  $i_{\min} = 2,79 \text{ см}$ .

Максимальна гнучкість стержня

$$\lambda_1 = \mu l / i_{\min} = 1 \cdot 200 / 2,79 = 71,7,$$

де, відповідний до заданих умов закріплення, коефіцієнт довжини  $\mu = 1$  (табл. Б, с. 49).



Із таблиці коефіцієнтів  $\varphi$  (табл. В, с. 49) для СтЗ беремо  $\varphi = 0,81$  при  $\lambda = 70$  та  $\varphi = 0,75$  при  $\lambda = 80$ .

Для обчислення  $\varphi'_1$  при  $\lambda_1 = 71,7$  скористуємося лінійною інтерполяцією:

$$\varphi'_1 = 0,81 - [(0,81 - 0,75)/10]1,7 = 0,8.$$

Оскільки коефіцієнти  $\varphi_1$  і  $\varphi'_1$  значно відрізняються, необхідно виконати розрахунки у другому наближенні.

Приймаємо у другому наближенні

$$\varphi_2 = (0,6 + 0,8) / 2 = 0,7.$$

Тоді

$$F_2 = \frac{500 \cdot 10^3}{0,7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 44,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 44,6 \text{ см}^2.$$

За сортаментом ГОСТ 8239-89 приймаємо двотавр № 27 з площею  $F = 40,2 \text{ см}^2$  і мінімальним радіусом інерції  $i_{min} = 2,54 \text{ см}$ . Визначаємо гнучкість

$$\lambda_2 = 1 \cdot 200 / 2,54 = 78,7.$$

Для  $\lambda_2 = 78,7$  за даними таблиці В, стор. 49, розраховуємо

$$\varphi'_2 = 0,81 - [(0,81 - 0,75)/10] \cdot 8,7 = 0,76.$$

Значення  $\varphi'_2$  мало відрізняється від попередньо прийнятого значення  $\varphi_2 = 0,7$ . Перевіряємо умову стійкості

$$\sigma \leq \varphi[\sigma];$$

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{500 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^{-4}} = 124,4 \text{ МПа} \not\leq \varphi[\sigma] = 0,76 \cdot 160 = 121,6 \text{ МПа},$$

умова не виконується. Визначаємо перенапруження:

$$\Delta = [(124,4 - 121,6) / 121,6] 100 \% = 2,3 \%.$$

Перенапруження незначне, менш ніж 3%, що є цілком допустимим.

Таким чином остаточно приймаємо двотавр № 27 за ГОСТ 8239-89.

## ***ПИТАННЯ ДО ЗАХИСТУ РОБІТ***

### ***Задача 1***

1. Що називають реактивними зусиллями і який вони мають характер у відповідності до типу опорного пристрою балки? Показати на прикладі заданої балки.

2. Які балки називають статично визначуваними і як практично визначають реактивні зусилля їх опор?

3. Що називають „перерізуючою (поперечною) силою”, як визначають її величину в поперечному перерізі балки та яке правило знаків застосовують до неї?

4. Що називають „згинальним моментом”, як визначають його величину в поперечному перерізі балки та яке правило знаків застосовують до нього?

5. В чому полягає суть гіпотези плоских перерізів технічної теорії згинання балок?

6. Як встановлюють положення небезпечного перерізу при поперечному згинанні балки і найбільш напружену в ньому точку?

7. За якою формулою визначають нормальні напруження при згинанні балок? Пояснити всі величини і вказати їх розмірність. Зобразити по висоті круглого перерізу балки епюру цих напружень.

8. За якою формулою визначають дотичні напруження при поперечному згинанні балок? Пояснити всі величини і вказати їх розмірність. Зобразити по висоті круглого перерізу балки епюру цих напружень.

9. Який вигляд має умова міцності при поперечному згинанні балки та як визначають еквівалентні напруження за III і IV класичними теоріями міцності?

10. В чому полягає сутність методу початкових параметрів при визначенні лінійних переміщень і кутів повороту поперечних перерізів балки?

### ***Задача 2***

1. Який різновид складного опору має місце для вала, що розраховується? Вкажіть зовнішні зусилля, які спричиняють прості види деформування.

2. Які типи напружень виникають в поперечному перерізі вала при одночасній дії згинання і кручення?
3. За якою формулою і для яких точок перерізу визначають максимальні нормальні напруження при згинанні вала? Поясніть всі величини і вкажіть їх розмірність.
4. За якою формулою і для яких точок перерізу визначають максимальні дотичні напруження при згинанні круглого вала? Поясніть всі величини і вкажіть їх розмірність.
5. За якою формулою і для яких точок перерізу визначають максимальні дотичні напруження при крученні круглого вала? Поясніть всі величини і вкажіть їх розмірність.
6. Який характер розподілу в поперечному перерізі нормальних і дотичних напружень при згинанні, а також дотичних напружень при крученні круглого вала?
7. Як встановлюють положення небезпечних перерізів круглого вала при його згинанні і крученні?
8. Які точки круглого перерізу вала і чому вони є найбільш напруженими при одночасній дії згинання і кручення?
9. Який вигляд має умова міцності при згинанні і крученні круглого вала і за якою формулою визначається величина зведеного моменту?
10. В чому полягає повна перевірка міцності вала, який знаходиться в умовах складного згинання і кручення?

### ***Задача 3***

1. Які балки називають статично невизначуваними і як визначають ступінь статичної невизначуваності?
2. В чому полягає суть розкриття статичної невизначуваності балок з використанням рівнянь трьох моментів?
3. Як визначають реактивні сили в опорних перерізах балки і перевіряють правильність їх визначення?
4. Як встановлюють положення небезпечних перерізів балки при поперечному згинанні?
5. Які типи напружень виникають в перерізах балки при поперечному згинанні?
6. Який вигляд має умова міцності при поперечному згинанні балки і як практично нею користуються?

7. За якою формулою і для яких точок перерізу визначають максимальні нормальні напруження при згинанні балки? Поясніть всі величини і вкажіть їх розмірність.

8. За якою формулою і для яких точок перерізу визначають максимальні дотичні напруження при поперечному згинанні балки? Поясніть всі величини і вкажіть їх розмірність.

9. Який характер розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті поперечного перерізу при згинанні балки?

10. Який зв'язок існує між епюрами перерізуючої сили  $Q$ , згинального моменту  $M$  та переміщення  $w$ ? Показати цей зв'язок на зображених епюрах заданої балки.

#### **Задача 4**

1. В чому полягає явище втрати стійкості стиснутого стержня?

2. Що називають критичною силою і критичним напруженням стиснутого стержня?

3. Що називають гнучкістю стержня? Записати формулу, за якою визначають її значення та пояснити всі величини і вказати їх розмірність.

4. За якою формулою визначають критичну силу заданого стиснутого стержня? Пояснити всі величини та вказати їх розмірність.

5. Що представляє собою коефіцієнт довжини і яке значення він приймає при типових умовах закріплення стержня?

6. Яку форму матиме заданий стержень при втраті ним стійкості?

7. Який вигляд має умова стійкості стержня через напруження і коефіцієнт запасу та пояснити всі величини, що до неї входять?

8. Що представляє собою коефіцієнт зменшення основних допустимих напружень  $\varphi$  і як практично визначається його величина?

9. Який вигляд має умова стійкості через коефіцієнт зменшення допустимих напружень на міцність і пояснити величини, які до неї входять.

10. Записати практичну формулу добору за умови стійкості площі поперечного перерізу стиснутого стержня і пояснити, як її практично використовують для прокатних профілів.

## **ЕКЗАМЕНАЦІЙНІ ПИТАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»**

### **Частина 2**

1. Пояснити, яке тіло називають балкою, навести основні типи опор. Дати визначення статично визначуваної і статично невизначуваної балки. Показати на прикладі визначення реактивних зусиль (сил, моментів) при плоскому згинанні статично визначної балки.

2. Викласти поняття перерізуючої сили в поперечному перерізі балки, вказати її позначення і розмірність. Сформулювати правило знаків та пояснити спосіб визначення величини цієї сили в будь-якому перерізі балки.

3. Викласти поняття згинального моменту в поперечному перерізі балки, вказати його позначення і розмірність. Сформулювати правило знаків та пояснити спосіб визначення цього моменту в будь-якому перерізі балки.

4. Описати процедуру побудови епюр поперечної сили і згинального моменту аналітичним способом та продемонструвати її на прикладі.

5. Отримати диференціальні залежності між внутрішніми зусиллями і зовнішнім навантаженням балки для випадку плоского згину.

6. Вивести формулу для визначення нормальних напружень при чистому плоскому згинанні балки. На прикладах показати побудову епюри цих напружень по висоті різних типів поперечного перерізу балки.

7. Вивести формулу для визначення дотичних напружень при поперечному згинанні балки в одній площині. Показати побудову епюри цих напружень по висоті прямокутного і двотаврового поперечних перерізів.

8. Отримати диференціальне рівняння зігнутої осі балки і залежності між силовими і кінематичними елементами згинання. Пояснити суть граничних умов і їх необхідність.

9. Викласти процедуру визначення лінійних і кутових переміщень поперечних перерізів балки безпосереднім

інтегруванням диференціального рівняння згину. Показати на прикладі визначення сталих інтегрування.

10. Викласти суть і отримати формули методу початкових параметрів для визначення лінійних і кутових переміщень поперечних перерізів призматичної балки при згинанні. Показати на прикладі визначення початкових параметрів.

11. Пояснити, як виконується розрахунок на міцність балок при плоскому згинанні. Записати умову міцності і на прикладі показати її використання для добору розмірів поперечних перерізів.

12. Дати пояснення узагальненим силам і переміщенням. Навести приклади узагальнених сил і відповідних їм переміщень. Показати, як визначається повне переміщення при одночасній дії декількох навантажень.

13. Пояснити, як визначається елементарна робота зовнішньої сили. Отримати формулу роботи при статичній дії узагальнених сил.

14. Пояснити, як визначається для стержня робота внутрішніх зусиль різних типів. Отримати загальну формулу для визначення роботи у випадку дії в перерізах шести внутрішніх силових факторів.

15. Сформулювати принцип початку можливих переміщень, записати у математичній формі і пояснити його застосування до пружних систем.

16. Довести теорему про взаємність робіт та викласти теорему взаємності переміщень. Показати на прикладі використання вказаних теорем при розрахунках лінійних і кутових переміщень поперечних перерізів балок, які згинаються.

17. Вивести формулу для визначення переміщень плоскої стержневої системи з використанням принципу початку можливих переміщень. Продемонструвати метод Мора на прикладі визначення переміщень при згинанні однопрогонової балки.

18. Пояснити, як обчислюються інтеграли Мора способом Верещагіна. Показати використання цього способу на прикладі.

19. Пояснити, що являє собою потенціальна енергія деформації і як визначається її величина у загальному випадку навантаження стержня та при плоскому поперечному згинанні.

20. Сформулювати і доказати теорему Кастільяно. Показати її використання для визначення лінійних або кутових переміщень поперечних перерізів балки.

21. Сформулювати і доказати теорему Лагранжа. Показати її використання для визначення зовнішніх сил, що діють на стержень або систему стержнів.

22. Сформулювати і доказати теорему про мінімум потенціальної енергії статично невизначених систем. Показати її використання для визначення зайвих реактивних зусиль однопрогонової призматичної балки.

23. Пояснити умови, за яких у балці має місце складне і косе згинання. Виписати формули для визначення напружень (нормальних і дотичних) та переміщень при складному згинанні. Записати умову міцності при складному згинанні і пояснити, як її можна використати для підбору розмірів перерізу.

24. Пояснити умови, коли у валах має місце згинання з крученням. Виписати формули для визначення нормальних і дотичних напружень при такому випадку деформування та записати умову міцності. Показати, як із умови міцності визначається діаметр вала.

25. Охарактеризувати етапи розрахунку статично невизначуваних стержневих систем. Пояснити, що таке основна та еквівалентна системи.

26. Викласти порядок розрахунку міцності однопрогонових статично невизначуваних балок. На прикладі згинання призматичної балки показати визначення зайвих реактивних зусиль.

27. Пояснити процедуру отримання канонічних рівнянь методу сил. Показати на прикладі плоскої рами побудову системи канонічних рівнянь і визначення зайвих реактивних зусиль.

28. Описати розкриття статичної невизначуваності багатпрогонової нерозрізної балки за допомогою рівнянь трьох моментів. Показати, як будують епюри внутрішніх зусиль на прикладі двопрогонової балки.

29. Викласти поняття про стійкість форми рівноваги пружних систем. Пояснити, яку величину навантаження називають критичною і записати умову стійкості для стержня.

30. Вивести формулу Ейлера для визначення критичної сили шарнірно обпертого, однопрогонового, призматичного стержня, який стискується сталою поздовжньою силою. Пояснити, як встановити форму втрати стійкості і графічно зобразити її.

31. Пояснити, як впливають умови закріплення кінців стиснутого стержня на значення Ейлерової сили. Записати загальну формулу для визначення Ейлерової сили призматичного стержня з типовими закріпленнями кінців і пояснити, як нею користуватись.

32. Пояснити, в чому полягає особливість визначення критичних сил при напруженнях, що перевищують границю пропорційності матеріалу. Записати зв'язок критичного напруження з гнучкістю стержня і відобразити його графічно. Показати, як практично визначають критичне напруження.

33. Описати явище втомленості матеріалу при напруженнях, що змінюються в часі. Зобразити цикл напружень і вказати його характеристики.

34. Дати означення границі витривалості матеріалу. Зобразити криву втомленості. Викласти методи визначення границі витривалості.

35. Охарактеризувати конструктивно-технологічні фактори, які впливають на границю витривалості матеріалу. Записати і пояснити умову міцності при циклічній зміні напружень.

36. Пояснити явище ударного навантаження елементів конструкцій. Викласти гіпотези технічної теорії удару і поняття коефіцієнта динамічності.

37. Виписати формули для визначення коефіцієнта динамічності при осьовому і згинальному ударах стержня і показати, як практично користуватись цими формулами. Записати умову міцності при ударі.

38. Пояснити особливості роботи матеріалу при ударних навантаженнях. Описати, як практично визначають ударну в'язкість матеріалу.



## ***ПИТАННЯ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ЗАЛІКУ З ДИСЦИПЛІНИ «ОПІР МАТЕРІАЛІВ»***

1. Пояснити, яке тіло називають балкою і які основні типи опор зустрічаються на практиці.

2. Пояснити на прикладі, як визначають реактивні зусилля (сили, моменти) при плоскому згинанні балки.

3. Пояснити, що називають поперечною (перерізуючою) силою в перерізі балки і як визначається її величина, вказати позначення, розмірність та сформулювати правило знаків.

4. Пояснити, що називають згинальним моментом в перерізі балки і як визначається його величина, вказати позначення, розмірність та сформулювати правило знаків.

5. Виписати основні диференціальні залежності між силовими і кінематичними елементами згинання балок і пояснити їх зміст.

6. Виписати формулу для визначення нормальних напружень при згинанні балки і пояснити, як нею користуватись.

7. Виписати формулу для визначення дотичних напружень при згинанні балки і пояснити, як нею користуватись.

8. Виписати умову міцності балки при поперечному згинанні і пояснити, як виконують розрахунок на міцність.

9. Сформулювати принцип можливих переміщень, теорему про взаємність робіт і переміщень та вказати, де вони використовуються при розрахунках стержневих систем.

10. Сформулювати теореми Лагранжа, Кастільяно, про мінімум потенціальної енергії та вказати, при яких розрахунках стержневих систем їх використовують.

11. Пояснити основні види складного деформування балок і валів. Назвати компоненти напружень, які необхідно враховувати при розрахунку їх на міцність.

12. Охарактеризувати основні етапи розрахунку міцності статично невизначуваних стержневих систем (на прикладі однопрогонової або багатопрогонової балки на жорстких опорах).

13. Пояснити явище втоми матеріалу. Назвати основні характеристики циклу напружень (деформацій), що змінюються в часі.

14. Пояснити, що таке крива втоми і в яких координатах її представляють.

15. Пояснити, що називають границею витривалості матеріалу, як її позначають та яку розмірність вона має.

16. Пояснити, яку силу, що діє вздовж стержня, називають критичною. Записати і пояснити умову стійкості стержня.

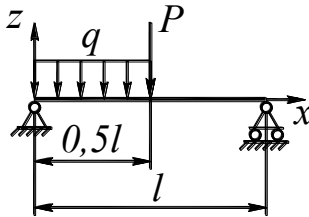
17. Виписати формулу для визначення критичної сили для однопрогонового шарнірно опертого стержня та пояснити, як нею користуватись.

18. Пояснити поняття ударної в'язкості матеріалу і спосіб вивчення цієї характеристики.

# ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СКЛАДАННЯ ІСПИТУ І ЗАЛІКУ

## ЗАДАЧА 1

Для заданої статично визначної балки побудувати епюри перерізуючої (поперечної) сили  $Q$ , згинального моменту  $M$  і встановити положення небезпечного перерізу (перерізів).



**Вихідні дані:**

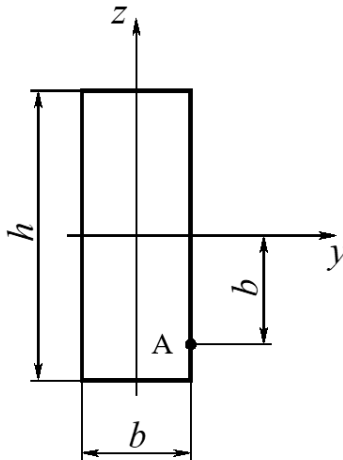
$$l = 2 \text{ м};$$

$$P = 10 \text{ кН};$$

$$q = 20 \text{ кН/м}.$$

## ЗАДАЧА 2

Визначити нормальні напруження в точці  $A$  заданого перерізу балки, в якому діє згинальний момент  $M_y$  і перерізуюча (поперечна) сила  $Q_z$ .



**Вихідні дані:**

$$b = 40 \text{ мм};$$

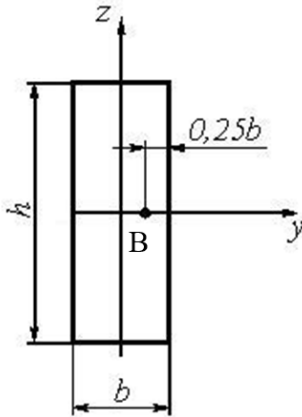
$$h = 120 \text{ мм};$$

$$M_y = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_z = 10 \text{ кН}.$$

### ЗАДАЧА 3

Визначити дотичні напруження в точці  $B$  заданого перерізу балки, де діє згинальний момент  $M_y$  і перерізуюча (поперечна) сила  $Q_z$ .



#### **Вихідні дані:**

$$b = 20 \text{ мм};$$

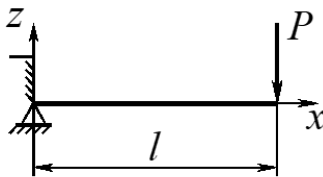
$$h = 60 \text{ мм};$$

$$M_y = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_z = 20 \text{ кН}.$$

### ЗАДАЧА 4

Користуючись методом початкових параметрів, визначити кут повороту правого кінцевого перерізу заданої балки.



#### **Вихідні дані:**

$$l = 1 \text{ м};$$

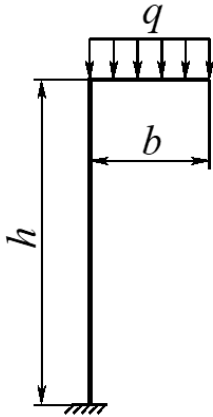
$$I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$P = 4 \text{ кН}.$$

### ЗАДАЧА 5

Для заданої плоскої рами побудувати епюри внутрішніх силових факторів і встановити положення небезпечного перерізу (перерізів).



**Вихідні дані:**

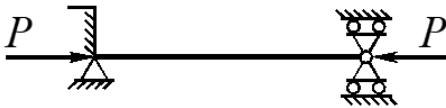
$$a = 2 \text{ м};$$

$$b = 1 \text{ м};$$

$$q = 10 \text{ кН/м}.$$

### ЗАДАЧА 6

Визначити критичну силу центрально стиснутого сталевго стержня із незмінним поперечним перерізом.



**Вихідні дані:**

$$l = 2 \text{ м};$$

$$I = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

## **ЛІТЕРАТУРА**

### **Основна**

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів : підручник. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.

2. Сопротивление материалов : учебник / Г.С. Писаренко, В.А. Огарев, А.Л. Квитка и др. Под ред. Г.С. Писаренко. – Київ : Вища школа, 1986. – 775 с.

3. Опір матеріалів : навчальний посібник / Л.І. Коростильов, О.Є. Лугінін, В.В. Спіхтаренко, Р.Ю. Коршиков, С.Ю. Клименков, С.В. Терлич; за ред. д-ра техн. наук Л.І. Коростильова ; 2-ге вид., перероб. та доп. – Миколаїв : НУК, 2019. – 300 с.

4. Посobie к решению задач по сопротивлению материалов: Учебное пособие / И.Н. Миролюбов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский и др. – Москва : Высшая школа, 1985. – 399 с.

5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Київ : Наукова думка, 1988. – 736 с.

6. Коробка С.С. Неженцев П.И. Методические указания к выполнению расчетно-графических заданий по курсу сопротивлению материалов для студентов вечернего судомеханического факультета. Часть II. – Николаев : НКИ, 1984. – 44 с.

7. Жижко А.В., Лавренюк В.Г., Сазонов И.А. Напряженное состояние стержневых систем : методические указания к лабораторным работам. – Николаев : НКИ, 1988. – 47 с.

### **Додаткова**

8. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. : підручник / В.Г. Піскунов, Ю.М. Федоренко, В.Д. Шевченко та ін. За ред. В.Г. Піскунова. – Київ : Вища школа, 1994.

9. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов : учебник. – Москва : Высшая школа, 1989. – 624 с.

10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов : учебник. – Москва : Наука, 1986. – 512 с.

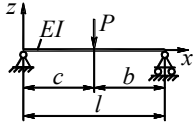
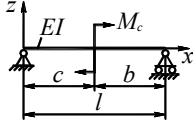
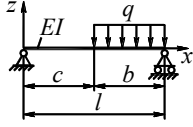
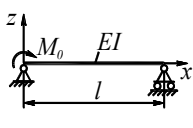
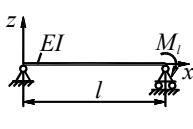
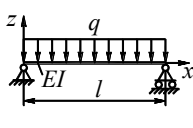
11. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев : Будівельник, 1982. – 280 с.

12. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев, А.И. Коданев и др. Под ред. А.С. Вольмира. – Москва : Наука, 1984. – 408 с.

13. Цурпал И.А., Барабан Н.П., Швайко В.М. Сопротивление материалов: Лабораторные работы : учебное пособие. – Киев : Вища школа, 1988. – 248 с.

## ДОВІДКОВІ ТАБЛИЦІ

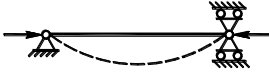



Таблиця А. Кути повороту кінцевих перерізів статично визначуваних однопрогонових балок

Схема балки	Кути повороту $\theta$ кінцевих перерізів балки <sup>*)</sup> :				
	Кут	Загальний вираз	$c = 0,25l$	$c = 0,50l$	$c = 0,75l$
	$\theta_0$	$-\frac{Pcb}{6EI} \left(1 + \frac{b}{l}\right)$	$-\frac{7}{128} \frac{Pl^2}{EI}$	$-\frac{1}{16} \frac{Pl^2}{EI}$	$-\frac{5}{128} \frac{Pl^2}{EI}$
	$\theta_l$	$\frac{Pcb}{6EI} \left(1 + \frac{c}{l}\right)$	$\frac{5}{128} \frac{Pl^2}{EI}$	$\frac{1}{16} \frac{Pl^2}{EI}$	$\frac{7}{128} \frac{Pl^2}{EI}$
	$\theta_0$	$-\frac{M_c l}{6EI} \left(1 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$	$-\frac{11}{96} \frac{M_c l}{EI}$	$\frac{1}{24} \frac{M_c l}{EI}$	$\frac{13}{96} \frac{M_c l}{EI}$
	$\theta_l$	$\frac{M_c l}{6EI} \left(1 - 3\frac{c^2}{l^2}\right)$	$\frac{13}{96} \frac{M_c l}{EI}$	$\frac{1}{24} \frac{M_c l}{EI}$	$-\frac{11}{96} \frac{M_c l}{EI}$
	$\theta_0$	$-\frac{ql^2 b}{24EI} \left(1 + 2\frac{c}{l} - \frac{c^2}{l^2}\right)$	$-\frac{23}{512} \frac{ql^3}{EI}$	$-\frac{7}{192} \frac{ql^3}{EI}$	$-\frac{31}{1536} \frac{ql^3}{EI}$
	$\theta_l$	$\frac{ql^2 b}{24EI} \left(1 + \frac{c}{l}\right)^2$	$\frac{25}{512} \frac{ql^3}{EI}$	$\frac{3}{64} \frac{ql^3}{EI}$	$\frac{49}{1536} \frac{ql^3}{EI}$
	$\theta_0$	$-\frac{M_0 l}{3EI}$	-	-	-
	$\theta_l$	$\frac{M_0 l}{6EI}$	-	-	-
	$\theta_0$	$\frac{M_l l}{6EI}$	-	-	-
	$\theta_l$	$-\frac{M_l l}{3EI}$	-	-	-
	$\theta_0$	$-\frac{ql^3}{24EI}$	-	-	-
	$\theta_l$	$\frac{ql^3}{24EI}$	-	-	-

<sup>\*)</sup> **Примітка.** Кут повороту перерізу  $\theta$  додатний при повороті за напрямком руху годинникової стрілки і від'ємний при повороті проти руху.



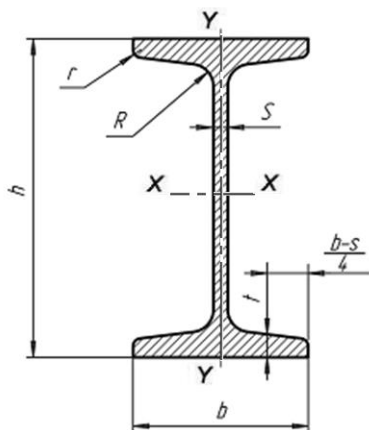
Таблиця Б. Значення коефіцієнта довжини  $\mu$  для типових випадків закріплення кінцевих перерізів стержня

Розрахункова схема	$\mu$
	1
	0,7
	0,5
	2

Таблиця В. Залежність коефіцієнта  $\phi$  від гнучкості  $\lambda$  сталевих стержнів

Гнучкість, $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$		Гнучкість, $\lambda$	Коефіцієнт $\phi$	
	Ст2, Ст3, Ст4	Ст5		Ст2, Ст3, Ст4	Ст5
0	1,00	1,00	—	—	—
10	0,99	0,98	110	0,52	0,43
20	0,96	0,95	120	0,45	0,36
30	0,94	0,92	130	0,40	0,33
40	0,92	0,89	140	0,36	0,29
50	0,89	0,86	150	0,32	0,26
60	0,86	0,82	160	0,29	0,24
70	0,81	0,76	170	0,26	0,21
80	0,75	0,70	180	0,23	0,19
90	0,69	0,62	190	0,21	0,17
100	0,60	0,51	200	0,19	0,16

Таблиця Г. Балки двотаврові (двотаври)  
за ГОСТ 8239-89

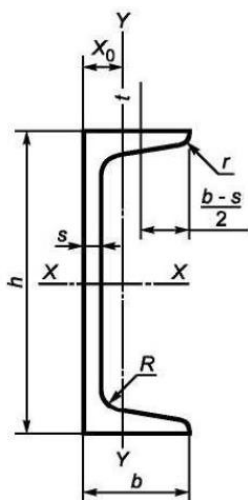


Кут нахилу внутрішніх граней  
полок 6–12 %

- $h$  – висота двотавра;
- $b$  – ширина полки;
- $s$  – товщина стінки;
- $t$  – середня товщина полки;
- $R, r$  – радіуси заокруглення;
- $F$  – площа поперечного перерізу;
- $m$  – погонна маса;
- $I$  – момент інерції осьовий;
- $W$  – момент інерції осьовий;
- $i$  – момент інерції осьовий;
- $S$  – момент інерції осьовий.

номер	Розміри, мм						$F$ см <sup>2</sup>	$m$ кг м. п.	Довідкові величини						
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			$I_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15	6	72,6	57,0	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16	7	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	17	7	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	18	7	118	92,6	55692	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	20	8	138	108,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

Таблиця Д. Швелери з нахилом внутрішніх граней полок  
за ГОСТ 8240-97



- $h$  – висота балки;
- $b$  – ширина полки;
- $s$  – товщина стінки;
- $t$  – середня товщина полки;
- $R, r$  – радіуси заокруглення;
- $F$  – площа поперечного перерізу;
- $m$  – погонна маса;
- $I$  – момент інерції осьювий;
- $W$  – момент опору;
- $i$  – радіус інерції;
- $S$  – статичний момент площі.

Кут нахилу внутрішніх граней  
полок 4–10%

номер	Розміри, мм						$F$ см <sup>2</sup>	$m$ кг м. п.	Довідкові величини							$x_0$ см
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			$I_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$I_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7980	484	13,0	281	410	51,8	2,97	2,59
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10820	601	14,0	350	513	61,7	3,10	2,68
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

*Навчальне видання*

**Методичні вказівки**  
до самостійної роботи студентів  
заочної форми навчання  
при вивченні дисципліни «Опір матеріалів»

Частина II

Верстка – Ю. С. Семенченко

Підписано до друку 13.02.2020 р. Формат 60×84/16.  
Папір офсетний. Гарнітура Times. Цифровий друк.  
Ум. друк. арк. 3,02. Наклад 100. Замовлення № 1608-67.  
Ціна договірна. Віддруковано з готового оригінал-макета.

Видавець і виготовлювач  
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025  
E-mail: publishing@nuos.mk.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 6402 від 19.09.2018 р.

Віддруковано в друкарні Видавничий дім «Гельветика»  
73034, м. Херсон, вул. Паровозна, 46а  
Телефони +38 (0552) 39 95 80, +38 (095) 934 48 28, +38 (097) 723 06 08  
E-mail: mailbox@helvetica.ua  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
ДК № 6424 від 04.10.2018 р.