



**Aleksandr G. Leyko**  
Лейко  
Александр  
Георгиевич

УДК 623.983  
Д 36

## **ANALYTICAL STUDIES OF THE PHYSICAL FIELDS OF HYDROACOUSTIC STATIONS WITH LINEAR LONG-LENGTH TOWED ARRAYS NEAR THE SEA SURFACE**

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ С ЛИНЕЙНЫМИ ПРОТЯЖЕННЫМИ БУКСИРУЕМЫМИ АНТЕННАМИ ВБЛИЗИ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

**DOI 10.15589/SMI20170113**

**Aleksandr G. Leyko**

О. Г. Лейко, д-р техн. наук, проф.  
aleksander\_leiko@ukr.net  
ORC ID: 0000-0002-7744-473X

**Anatoliy V. Derepa**

А. В. Дерепя, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.  
derepaan@i.ua  
ORC ID: 0000-0001-7334-2237



**Anatoliy V. Derepa**  
Дерепя  
Анатолий  
Войткович

*Central Research and Development Institute of Armament and Military Equipment, Kiev*

*Центральный научно-исследовательский институт вооружения и военной техники Вооруженных Сил Украины, г. Киев*

**Abstract.** Problematic aspects of the system “hydroacoustic station – surface ship”, with the station equipped with the arrays of variable depth, have been discussed. The aim of the paper is to study the physical fields of the considered system when their linear flexible long-length arrays are towed near the sea surface. Using the image method in the system “plane solid bound – electroelastic cylindrical piezoceramic shell” to solve the differential equations that describe the motion of elastic media in the inner and outer space of the transducers of the array, as well as the motion of the thin piezoceramic shell with thickness polarization and forced electrostatics for piezoceramics, enabled obtaining analytical equations of the physical fields created by the linear arrays in the process of their operation near the sea surface. These equations are initial for obtaining numerical data on the properties of acoustical, mechanical and electrical fields of the array depending on the towing conditions. The study results can be applied for assessment of the changes of the effectiveness of the system “hydroacoustic station – surface ship” when operating conditions are changing and are the basis for the decision to change the array towing conditions, if required.

**Keywords:** hydroacoustic station; flexible long-length towed array; cylindrical piezoceramic shell.

**Аннотация.** Исходя из задачи систематизированного исследования характеристик гидроакустических станций в условиях, моделирующих реальные, в работе рассмотрено модельное представление линейной протяженной буксированной антенны такой станции в присутствии морской поверхности и получены аналитические соотношения, позволяющие описать физические поля антенны.

**Ключевые слова:** гидроакустическая станция; гибкая протяженная буксирюемая антенна; пьезокерамическая цилиндрическая оболочка.

**Анотація.** Виходячи із завдання систематизованого дослідження характеристик гідроакустичних станцій в умовах, що моделюють реальні, в роботі розглянуто модельне уявлення лінійної протяжної буксированої антени такої станції в присутності морської поверхні та одержані аналітичні співвідношення, що дозволяють описати фізичні поля антени.

**Ключові слова:** гідроакустична станція; гнучка протяжна буксирована антена; п'єзокерамічна циліндрична оболонка.

### **References**

- [1] Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shulga N. A. *Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruktsyy. T. 5. Elektrouprugost* [Mechanics of the connected fields in the construction elements. Vol. 5. Electroelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1989. 280 p.
- [2] Guz A. N., Golovin V. T. *Difraktsiya uprugikh voln v mnogosv'yaznikh telakh* [Diffraction of elastic waves in multiconnected bodies]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1972. 254 p.

- [3] Guz A. N., Babayev A. E. *Gidrouprugost sistem obolochek* [Hydroelasticity of shell systems]. Kiev, Vysshaya shkola Publ., 1984. 208 p.
- [4] Ivanov E. A. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na dvukh telakh* [Diffraction of electromagnetic waves on two bodies]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1968. 584 p.
- [5] Leyko A. G., Nizhnik A. I., Starovoyt Ya. V. *Zvukovyye polya pyezokeramicheskikh izluchateley s razlichnym pyzeoeffektom* [Sound fields of piezoceramic emitters with various piezoelectric effect]. *Elektronika i svyaz – Electronics and Communications*, 2013, no.5, pp. 50–55.
- [6] Leyko A. G., Nizhnik A. I., Starovoyt Ya. V. *Akusticheskiye svoystva tsilindricheskikh pyezokeramicheskikh izluchateley silovoy i kompensirovannoy konstruktсии s prodolnnym i poperechnym pyzeoeffektom* [Acoustic properties of cylindrical piezoceramic emitters of the power or compensated structure with longitudinal and lateral piezoelectric effect] *Elektronika i svyaz – Electronics and Communications*, 2013, no. 6, pp.62–73.
- [7] Leyko A. G., Derepa A. V. *Analiticheskiye issledovaniya fizicheskikh poley gidroakusticheskikh stantsiy s lineynymi protyazhennymi buksiruyemyimi antennami vblizi morskogo dna* [Analytical studies of the physical fields of hydroacoustic stations with linear long-length arrays towed near the sea surface]. *Sudostroeniye – Shipbuilding*, 2015, no.1 (3), pp. 142-151.

**Problem statement.** As it has been already noted in [7], the effectiveness of the system “hydroacoustic station–surface ship” (HAS–SS) with the arrays of variable depth (AVD) in the form of flexible long-length towed arrays (FLTA) can be sufficiently affected by the sea surface or the sea floor, near which the FLTA may happen to be in the process of towing. From physical considerations, it is qualitatively clear that the presence of media interfaces near the array should lead to distortion of its characteristics and, thus, to distortion of the parameters of the HAS with these FLTA compared to those which it would have at the absence of the mentioned interfaces.

In this context, let us point out that when a HAS is being designed, its requirements are usually specified for the conditions of infinite medium, since at the stage of the station design it is impossible to cover the whole range of changes in acoustic conditions which will take place during the operation of the HAS with FLTA. At the same time, when assessing the effectiveness of the operation of the HAS with FLTA in actual sea conditions, one should take into account their transition to infrasound and bass frequencies, for which most seas became wave-wise shallow, and the impact of their boundaries on the parameters of the HAS with such arrays significantly increased. Therefore, there appeared the necessity of obtaining the quantitative values of such impact.

The assessments allow for the following: first, evaluating the degree of loss in effectiveness of the HAS with FLTA in certain operating conditions and thus obtaining a realistic forecast of the probability of performing the tasks; second, suggesting the ways to improve the effectiveness of the HAS with FLTA at its operation in such conditions.

**Latest research and publications analysis.** It should be noted that the publications [5, 6] contain sufficiently complete studies of the physical properties of hydroacoustic transducers placed in an infinite medium and made in the form of the cylindrical piezoceramic

**Постановка проблемы.** Как уже отмечалось [7], на эффективность работы системы «гидроакустическая станция – надводный корабль» (ГАС–НК) с антеннами переменной глубины (АПГ) в виде гибких протяженных буксируемых антенн (ГПБА) существенное влияние могут оказывать морская поверхность либо морское дно, вблизи которых в процессе буксировки ГПБА может оказаться. Из физических соображений качественно ясно, что наличие границ раздела сред вблизи антенны должно привести к искажению ее характеристик и, следовательно, к искажению параметров ГАС с этой ГПБА по сравнению с теми, которые она бы имела в отсутствие указанных границ.

Заметим при этом, что обычно при проектировании ГАС, требования к ним задаются для условий безграничной среды, поскольку на этапе проектирования станции невозможно предусмотреть весь тот диапазон изменения акустических условий, который будет иметь место в процессе эксплуатации ГАС с ГПБА. В то же время, при оценке эффективности эксплуатации ГАС с ГПБА в реальных морских условиях, тем более с учетом их перехода в область инфразвуковых и низких звуковых частот, для которых большинство морей в волновом отношении стали мелководными и влияние их границ на параметры ГАС с такими антеннами существенно возросло, возникла необходимость в получении количественных значений этого влияния.

Наличие таких оценок позволяет: во-первых, оценить степень потери эффективности ГАС с ГПБА в тех или иных конкретных условиях эксплуатации и благодаря этому иметь реальный прогноз относительно вероятности выполнения поставленных задач; во-вторых, предложить возможные пути повышения эффективности ГАС с ГПБА при работе в таких условиях.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Следует отметить, что физические свойства гидроакустических преобразователей, которые размещены в безграничной среде и выполнены в виде цилиндрических пьезокерамических конструкций

structures of the power or compensated type with the use of the lateral or longitudinal piezoelectric effect. At the same time, virtually no attention in hydroacoustics has been paid to the study of the physical fields of individual transducers or their systems in the presence of plane interfaces of different media. This is due to the fact that the solution of the problem for a circular shell is greatly complicated by its presence near the boundary surface, because it necessitates simultaneous fulfillment of the boundary conditions on the surfaces of different shapes, namely the plane and circular cylindrical boundaries. The performed studies of oscillations of the cylindrical shells near a plane media interface [2, 3] have shown that in many cases the interaction of the reflecting surfaces has a significant qualitative and quantitative effect on the nature of the ongoing processes and on the shell's reception of the signal in particular.

**THE ARTICLE AIM** is the study of the physical fields of the systems of the considered type with regard to the HAS with arrays of variable depth in the form of linear FLTA at their operation near the sea surface.

**Basic material.** At the solution of the set problems, the initial point is to obtain the analytical correlations describing the sound fields generated by the FLTA at the presence of the media interfaces. The special feature of the problems, which significantly complicates their mathematical formulation and solution, is that the system includes bodies with different surface configurations, them being the plane media interface and the circular cylindrical transducer.

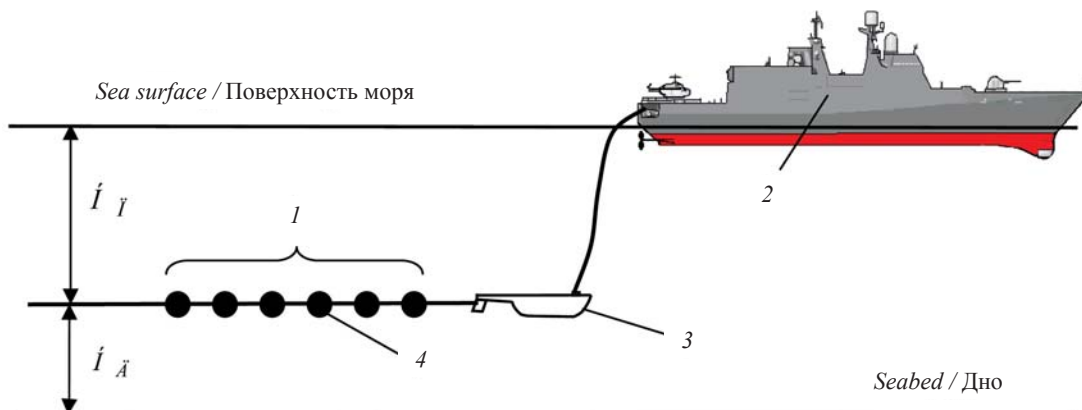
Let us consider the problem of receiving audio signals from/by the ship HAS with the array of variable depth, which is towed behind the carrier ship at the depth of  $H_{II}$  from the sea surface (Fig. 1).

силового или компенсированного типов с использованием поперечного или продольного пьезоэффектов, достаточно полно были изучены в работах [5, 6]. В то же время исследованию физических полей отдельных преобразователей или систем их в присутствии плоских границ раздела разных сред в гидроакустике практически не отводилось существенного внимания. Это связано с тем, что при решении рассматриваемых задач для круговой оболочки, присутствие вблизи нее ограничивающей поверхности существенно усложняет решение задач, поскольку при этом необходимо одновременно удовлетворять граничным условиям на поверхностях разной формы — плоской и круговой цилиндрических границах. Выполненные же исследования колебаний цилиндрических оболочек вблизи плоской границы раздела сред [2, 3] показывают, что во многих случаях взаимодействие отражающих поверхностей оказывает значительное качественное и количественное влияние на характер протекающих процессов, в частности, характеристику приема сигнала оболочкой.

**ЦЕЛЬЮ РАБОТЫ** является проведение исследования физических полей систем рассматриваемого типа применительно к ГАС с антеннами переменной глубины в виде линейных ГПБА при работе их вблизи морской поверхности.

**Изложение основного материала.** Исходными при решении поставленных задач является получение аналитических соотношений, описывающих звуковые поля, формируемые ГПБА при наличии границ раздела сред. Особенности этих задач, существенно осложняющими их математическую постановку и решение, является наличие в системе тел с различной конфигурацией их поверхностей — плоской границы раздела сред и кругового цилиндрического преобразователя.

Рассмотрим задачу о приеме звуковых сигналов корабельной ГАС с антенной переменной глубины, которая буксируется за кораблем-носителем на углублении  $H_{II}$  от морской поверхности (рис. 1).



**Fig. 1.** Diagram of the operation of the HAS with FLTA:

**Рис. 1.** Схема эксплуатации ГАС с ГПБА:

1 — FLTA / ГПБА; 2 — carrier ship / корабль-носитель; 3 — hydrodynamic depressor / гидродинамический заглубитель; 4 — FLTA receiving element / приемный элемент ГПБА.

The array is a linear discrete multi-element equidistant grid, each receiving element of which is executed as a thin-walled piezoceramic cylindrical shell of the power or compensated design.

In terms of its acoustic properties, the sea surface is characterized by two physical factors: the presence of the “water–air” interface and the sea surface disturbances.

Taking into account the current level of knowledge, the following calculation model can be accepted for the presented physical statement of the problem of the operation of the HAS with the linear array towed near the sea surface at the determination of the acoustic fields being used in these circumstances. Let us assume that the array is basically an infinitely thin cylindrical piezoceramic shell  $\Gamma_2$  with the average radius of  $r_{10}$  and the thickness  $h$ . This statement is close to reality, since the distance between the array elements is not that big, and its operating frequency range is infrasound and bass frequencies. Cylindrical surfaces of the shell are equipped with electrodes, and the electric signal of the voltage  $\psi_0$  is taken from them. The piezoceramic shell itself is polarized over its thickness. Structurally, the shell is sealed, and its inner cavity can be vacuumized, filled with air at normal atmospheric pressure or with a liquid medium of the density  $\rho_1$  and the sound velocity  $c_1$ . The array is placed into a liquid with the density  $\rho$  and the sound velocity  $c$  and is located at the distance  $H_n$  from the plane surface  $\Gamma_1$  parallel to it. The plane surface  $\Gamma_1$  is perfectly pliant and can serve as a calculation model of the considered disturbed sea surface for the range of infrasound and bass frequencies. The normal section of the system “shell–plane surface” and the orthogonal and cylindrical coordinate systems introduced for the problem solution are shown in Fig. 2.

A plane sound wave  $\Phi_0^{(1)}$  of the unit amplitude arrives onto this system of bodies from the medium in the direction of the unit vector  $\vec{n}$  which forms the angle  $\theta$  with the axis  $O$ . The sound wave front is parallel to the longitudinal axis of the shell.

For the accepted calculation model, the physical fields, which are generated by the linear antenna formed from the circular cylindrical transducers in the receive mode in the presence of the sea surface, can be determined by means of solving the following differential equations:

the wave equation describing the motion of elastic media (gas or liquid) inside and outside of the array transducers for the time dependency  $e^{-i\omega t}$ :

$$\Delta\Phi + k_i^2\Phi = 0; \quad (1)$$

Антенна представляет собой линейную дискретную многоэлементную эквидистантную решетку, каждый приемный элемент которой выполнен в виде тонкостенной пьезокерамической цилиндрической оболочки силовой или компенсированной конструкции.

Морская поверхность, с точки зрения акустических особенностей, характеризуется двумя физическими факторами. Первый из них связан с наличием границы раздела сред «вода–воздух», второй — с наличием волнения морской поверхности.

Изложенной физической постановке задачи эксплуатации ГАС с линейной антенной, буксируемой вблизи морской поверхности, может быть поставлена, с учетом существующего уровня знаний, в соответствие при определении используемых при этом акустических полей следующая расчетная модель. Будем полагать, что антенна представляет собой бесконечно тонкую цилиндрическую пьезокерамическую оболочку  $\Gamma_2$  со средним радиусом  $r_{10}$  толщиной  $h$ . Это утверждение близко к реальности, поскольку расстояние между элементами антенны невелико, а ее рабочим диапазоном частот являются инфразвуковые и низкие звуковые частоты. Цилиндрические поверхности оболочки электродированы и с них снимается электрический сигнал напряжением  $\psi_0$ . Сама пьезокерамическая оболочка поляризована по толщине. В конструктивном отношении оболочка герметизирована, а ее внутренняя полость может быть вакуумирована, заполнена воздухом при нормальном атмосферном давлении или жидкой средой с плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ . Антенна помещена в жидкость с плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$  и находится на расстоянии  $H_n$  от плоской поверхности  $\Gamma_1$  параллельно этой поверхности. Плоская поверхность  $\Gamma_1$  является идеально податливой и может служить расчетной моделью рассматриваемой волнующейся морской поверхности для диапазона низких звуковых и инфразвуковых частот. Нормальное сечение рассматриваемой системы «оболочка–плоская поверхность» и введенные для решения задачи ортогональные и цилиндрические системы координат представлены на рис. 2.

На эту систему тел из окружающей среды в направлении единичного вектора  $\vec{n}$  образующего угол  $\theta$  с осью  $O$  приходит плоская звуковая волна  $\Phi_0^{(1)}$  единичной амплитуды, фронт которой параллелен продольной оси оболочки.

Для принятой расчетной модели физические поля, формируемые линейной антенной, образованной из круговых цилиндрических преобразователей, в режиме приема в присутствии морской поверхности, могут быть определены путем совместного решения следующих дифференциальных уравнений:

волнового уравнения, описывающего движение упругих сред (газа или жидкости) внутри и вне преобразователей антенны для временной зависимости  $e^{-i\omega t}$ :

$$\Delta\Phi + k_i^2\Phi = 0; \quad (1)$$

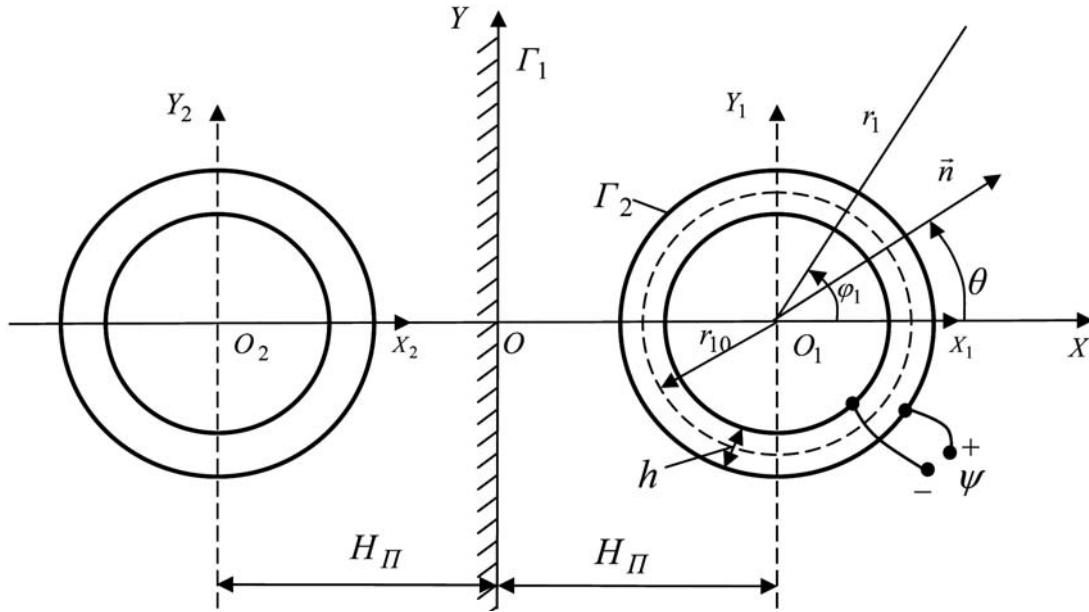


Fig. 2. Normal section of the system of bodies “sea surface–transducer” and the introduced coordinate systems

Рис. 2. Нормальное сечение системы тел «морская поверхность–преобразователь» и введенные системы координат

the equations of motion of thin shells with radial polarization in displacements:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{h^2}{12r_0} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{r_0^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ & - \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} - w - \\ & - \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{e_{31} r_{10}}{C_{11}^E} E_r^{(o)} + \\ & + \frac{r_0^2}{h C_{11}^E} q_r - \frac{r_0 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

the equations of forced electrostatics for piezoceramics:

$$\vec{E} = -grad\psi; \quad div \vec{D} = 0, \quad (3)$$

where  $\Delta$  — the Laplace operator;  $\Phi$  — the potential of the acoustic field velocity;

$k_i$  — is the wave number of the external ( $k_i = k$ ) and internal ( $k_i = k_{en}$ ) media;  $u$  and  $w$  — the circular and normal components of the vector of the displacements of the mechanical field of the shell;  $\gamma$  — the piezoceramics density;  $C_{11}^E$ ,  $e_{31}$ ,  $\varepsilon_{33}^S$  — the piezoceramics constants: the elasticity modulus at zero electric intensity, the piezoelectricity and dielectric permittivities at zero deformation;  $\vec{E}$  and  $\vec{D}$  — the vectors of the electric field intensity and induction;  $q_r$  — the external load of the piezoceramic shell:

$$q_r = -(p - p_{en}) \Big|_{r=r_0 \pm \frac{h}{2}}, \quad (4)$$

уравнений движения тонких оболочек с радиальной поляризацией в перемещениях:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{h^2}{12r_0} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} - \frac{r_0^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ & - \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} - w - \\ & - \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{e_{31} r_{10}}{C_{11}^E} E_r^{(o)} + \\ & + \frac{r_0^2}{h C_{11}^E} q_r - \frac{r_0 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

уравнений вынужденной электростатики для пьезо-керамики:

$$\vec{E} = -grad\psi; \quad div \vec{D} = 0, \quad (3)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $\Phi$  — потенциал скорости акустического поля;

$k_i$  — волновое число внешней ( $k_i = k$ ) и внутренней ( $k_i = k_{en}$ ) сред;  $u$  и  $w$  — круговая и нормальная составляющие вектора смещений механического поля оболочки;  $\gamma$  — плотность пьезокерамики;  $C_{11}^E$ ,  $e_{31}$ ,  $\varepsilon_{33}^S$  — постоянные пьезокерамики: модуль упругости при нулевой электрической напряженности, пьезопостоянные и диэлектрические проницаемости при нулевой деформации;  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  — векторы напряженности и индукции электрического поля;  $q_r$  — внешняя нагрузка пьезокерамической оболочки:

$$q_r = -(p - p_{en}) \Big|_{r=r_0 \pm \frac{h}{2}}, \quad (4)$$

where  $p$  and  $p_{en}$  — the hydrodynamic loads in the external and internal media of the array receivers;  $\psi$  — the electrostatic potential.

The given equations are supplemented by the boundary conditions, which include two components as for this problem. The first component is associated with the presence of the plane interface, while the second one deals with the presence of piezoceramic cylindrical shell.

The boundary condition at the acoustically soft plane interface has the following form:

$$\Phi_{\Sigma} = 0 \text{ at } x = 0, \quad (5)$$

where  $\Phi_{\Sigma}$  — the potential of the velocity of the complete acoustic field diffracted on the system “shell – plane surface”.

On the surface of the cylindrical shell, some kinematic conditions should be fulfilled. They reside in the equality of the velocities of the normal displacements of the points of the shell surface and the velocities of the oscillations of adjacent particles of internal and external media of the receivers:

$$-\frac{\partial \Phi_{\Sigma}}{\partial r_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad r_1' = r_{10} + \frac{h}{2}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \Phi_{en}}{\partial r_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad r_1'' = r_{10} - \frac{h}{2}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad (7)$$

where  $\Phi_{en}$  — the potential of the velocity of the acoustic field inside the piezoceramic shell of the receiver.

As for the acoustic field in the external medium, these conditions are supplemented by the conditions of radiation at infinity.

Electrical boundary conditions of the considered sound reception problem may be selected in the form of two variants of electric load for the array receiver: idle operation and operation at the actual electrical load  $z_{zn}$ .

In case of idle operation, when the displacement current in the piezoceramics is equal to zero, the equations of forced electrostatics for piezoceramics can be presented as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^1 D_r^{(0)} r_1 d\varphi_1 dz = 0, \quad (8)$$

Expression (8) is formulated for the piezoceramic shell with the height being equal to one.

When the piezoceramic shell electrodes of the unit height are closed by the outer circuit of the known complex impedance  $z_{zn}$ , the following expression should be used:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^1 D_r^{(0)} r_1 d\varphi_1 dz = \frac{\Psi}{Z_{zn}}, \quad (9)$$

where  $D_r^{(o)} = e_{31} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r_1} \right) + \varepsilon_{33}^S E_r^{(0)}$  [1].

где  $p$  и  $p_{en}$  — гидродинамические нагрузки во внешней и внутренней средах приемников антенны;  $\psi$  — электростатический потенциал.

Приведенные уравнения дополняются граничными условиями, которые для условий рассматриваемой задачи включают в себя две составляющие. Первая из них связана с наличием плоской границы, вторая — с наличием пьезокерамической цилиндрической оболочки.

Граничное условие на плоской границе, которая является акустически мягкой, имеет вид:

$$\Phi_{\Sigma} = 0 \text{ при } x = 0, \quad (5)$$

где  $\Phi_{\Sigma}$  — потенциал скорости полного звукового поля, дифрагированного на системе «оболочка–плоская поверхность».

На поверхности цилиндрической оболочки должны выполняться кинематические условия, состоящие в равенстве скоростей нормальных смещений точек поверхностей оболочки и скоростей колебаний прилегающих к ним частиц внутренней и внешней сред приемников:

$$-\frac{\partial \Phi_{\Sigma}}{\partial r_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad r_1' = r_{10} + \frac{h}{2}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad (6)$$

$$-\frac{\partial \Phi_{en}}{\partial r_1} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad r_1'' = r_{10} - \frac{h}{2}, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad (7)$$

где  $\Phi_{en}$  — потенциал скорости звукового поля внутри пьезокерамической оболочки приемника.

По звуковому полю во внешней среде эти условия дополняются условиями излучения на бесконечности.

Электрические граничные условия рассматриваемой задачи приема звука могут быть выбраны в виде двух вариантов электрической нагрузки приемников антенны: режима холостого хода и режима реальной электрической нагрузки  $z_{zn}$ .

В случае холостого хода, когда ток смещения в пьезокерамике равен нулю, уравнения вынужденной электростатики для пьезокерамики могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^1 D_r^{(0)} r_1 d\varphi_1 dz = 0, \quad (8)$$

Выражение (8) записано для пьезокерамической оболочки, высота которой равна единице.

В варианте, когда электроды пьезокерамической оболочки единичной высоты замкнуты внешним контуром с известным комплексным сопротивлением  $z_{zn}$ , необходимо использовать выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^1 D_r^{(0)} r_1 d\varphi_1 dz = \frac{\Psi}{Z_{zn}}, \quad (9)$$

где  $D_r^{(o)} = e_{31} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{w}{r_1} \right) + \varepsilon_{33}^S E_r^{(0)}$  [1].

The accepted assumptions allow reducing the problem of determining the physical fields of the linear antenna towed near the sea surface to the plane boundary problem.

Solution of the set problem will be carried out with the use of the image method [2, 3]. Within this method, the imaginary shell (Fig. 2) is introduced into consideration in such a way that when being superimposed on the main solution, it enables fulfilling certain boundary conditions.

Let us introduce into consideration the auxiliary coordinate system  $(X_2, Y_2)$  associated with the imaginary shell and place it in such a way that the poles  $O_1$  and  $O_2$  (Fig. 2) would be located symmetrically to the plane  $X = 0$ . The complete diffracted field will be presented as follows:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_O^{(1)} + \Phi_S^{(1)} + \Phi_O^{(2)} + \Phi_S^{(2)}, \quad (10)$$

where  $\Phi_O^{(1)}$  — the plane wave arriving on the system;  $\Phi_S^{(1)}$  — the plane wave that would reflect from the plane interface  $\Gamma_1$  at the absence of the shell  $\Gamma_2$ ;  $\Phi_O^{(2)}$  — the wave scattered by the shell  $\Gamma_2$  at the incidence of the plane wave arriving on it;  $\Phi_S^{(2)}$  — the wave scattered by the shell  $\Gamma_2$  and reflected from the plane interface  $\Gamma_1$ .

Let us express all the fields in cylindrical coordinate systems. The field  $\Phi_{\Sigma}^{(1)}$ , which is a superposition of the plane waves  $\Phi_O^{(1)}$  arriving and  $\Phi_S^{(1)}$  reflected from the plane interface  $\Gamma_1$ , can be presented as follows:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(1)} = \Phi_O^{(1)} + \Phi_S^{(1)} = \sum_n a_n J_n(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ + \sum_n \epsilon_n J_n(kr_2) e^{in\varphi_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

where  $a_n = i^n e^{-in\theta}$ ;  $J_n$  — the Bessel function;  $k$  — the wave number of the external medium.

The field  $\Phi_{\Sigma}^{(2)}$ , which is a superposition of the plane wave  $\Phi_O^{(2)}$  scattered from the boundary  $\Gamma_2$  and the wave  $\Phi_S^{(2)}$  reflected from the plane boundary  $\Gamma_1$ , will be represented in the form of expansions in cylindrical wave functions fulfilling the condition of radiation at infinity:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(2)} = \Phi_O^{(2)} + \Phi_S^{(2)} = \sum_n A_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ + \sum_n B_n H_n^{(1)}(kr_2) e^{in\varphi_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

where  $A_n$  and  $B_n$  — unknown coefficients;  $H_n^{(1)}$  — the Hankel function of the first kind.

Let us express the field  $\Phi_{\text{вн}}$  inside the piezoceramic shell of the receiver as a series expansion in cylindrical wave functions, which do not have any special features inside the shell:

$$\Phi_{\text{вн}} = \sum_n C_n J_n(k_{\text{вн}} r_1) e^{in\varphi_1}, \quad (13)$$

Принятые допущения позволяют свести задачу определения физических полей линейной антенны, при буксировании ее вблизи морской поверхности, к решению плоской краевой задачи.

Решение сформулированной задачи будем осуществлять с использованием метода изображений [2, 3]. Суть его состоит в том, что решение строится с учетом введения в рассмотрение воображаемой оболочки (рис. 2) таким образом, чтобы, будучи наложенным на основное решение, оно позволяло удовлетворять определенным граничным условиям.

Введем в рассмотрение вспомогательную систему координат  $(X_2, Y_2)$ , связанную с воображаемой оболочкой, и разместим ее так, чтобы полюса  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2) были размещены симметрично относительно плоскости  $X = 0$ . Полное дифрагированное поле представим в виде:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_O^{(1)} + \Phi_S^{(1)} + \Phi_O^{(2)} + \Phi_S^{(2)}, \quad (10)$$

где  $\Phi_O^{(1)}$  — проходящая на систему плоская волна;  $\Phi_S^{(1)}$  — плоская волна, которая отразилась бы от плоской границы  $\Gamma_1$  при отсутствии оболочки  $\Gamma_2$ ;  $\Phi_O^{(2)}$  — волна, рассеянная оболочкой  $\Gamma_2$ , при падении на нее проходящей плоской волны;  $\Phi_S^{(2)}$  — волна, рассеянная оболочкой  $\Gamma_2$ , и отраженная от плоской границы  $\Gamma_1$ .

Выразим все поля в цилиндрических системах координат. Поле  $\Phi_{\Sigma}^{(1)}$ , представляющее собой суперпозицию проходящей  $\Phi_O^{(1)}$  и отраженной  $\Phi_S^{(1)}$  от плоской границы  $\Gamma_1$  плоских волн можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(1)} = \Phi_O^{(1)} + \Phi_S^{(1)} = \sum_n a_n J_n(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ + \sum_n \epsilon_n J_n(kr_2) e^{in\varphi_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $a_n = i^n e^{-in\theta}$ ;  $J_n$  — функция Бесселя;  $k$  — волновое число внешней среды.

Поле  $\Phi_{\Sigma}^{(2)}$ , являющееся суперпозицией рассеянной  $\Phi_O^{(2)}$  от границы  $\Gamma_2$  плоской волны и отраженной  $\Phi_S^{(2)}$  от плоской границы  $\Gamma_1$  этой рассеянной волны, представим в виде разложений по цилиндрическим волновым функциям, удовлетворяющим условию излучения на бесконечности:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(2)} = \Phi_O^{(2)} + \Phi_S^{(2)} = \sum_n A_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ + \sum_n B_n H_n^{(1)}(kr_2) e^{in\varphi_2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  — неизвестные коэффициенты;  $H_n^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода.

Поле  $\Phi_{\text{вн}}$  внутри пьезокерамической оболочки приемника выразим разложением в ряд по цилиндрическим волновым функциям, не имеющим особенностей внутри оболочки:

$$\Phi_{\text{вн}} = \sum_n C_n J_n(k_{\text{вн}} r_1) e^{in\varphi_1}, \quad (13)$$

where  $C_n$  — unknown coefficients;  $k_{en}$  — the wave number of the medium inside the receiver.

The complete diffracted field  $\Phi_\Sigma$  should fulfill boundary condition (5) at the plane interface  $\Gamma_1$ . Then, similarly to the conclusions made in publications [2 3], in case of the perfectly pliant surface  $\Gamma_1$ , the correlation between the coefficients in expressions (11) and (12) should be selected as follows:

$$e_n = (-1)^{n+1} a_{-n}; B_n = (-1)^{n+1} A_{-n}. \quad (14)$$

Let us assess the performance of the piezoceramic shell of the receiver. For that purpose, let us present the tangential  $u$  and the normal  $w$  components of the shell displacements in the form of series by the eigenmode of the shells in vacuum:

$$u = \sum_n u_n e^{in\varphi_1}; w = \sum_n w_n e^{in\varphi_1} \quad (15)$$

where  $u_n$  and  $w_n$  — unknown coefficients of expansion.

To find the coefficients  $u_n$  and  $w_n$ , one should use equation (2) and condition of the fields conjugation (6) and (7) on the curved interface  $\Gamma_2$ . From the first equation of system (2) on the basis of the properties of completeness and orthogonality of the  $e^{in\varphi}$  function systems on the interval  $[0, 2\pi]$  follows the correlation between the coefficients  $u_n$  and  $w_n$ :

$$u_n = F_n w_n, n = -\infty, 0, \infty \quad (16)$$

$$\text{where } F_n = i \frac{n + \beta n^3}{(1 + \beta)n^2 - \omega^2 \alpha \gamma}; \beta = \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E e_{33}^S} \right);$$

$$\alpha = \frac{r_{10}^2}{C_{11}^E}.$$

Let us consider the element  $E_r^{(O)}$  of the second equation of system (2); for that purpose, let us apply the electrical boundary conditions in the form of (8) and (9).

It is stated in [1] that the normal components of the electric induction  $D_r$  and the electric field intensity  $E_r = E_r^{(O)} + \eta E_r^{(1)}$  of the cylindrical piezoceramic shell with radial polarization are characterized by the following approximate correlations:

$$D_r = D_r^{(O)} = e_{31} \left( \frac{1}{r_{10}} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} + \frac{w}{r_{10}} \right) + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)}, \quad (17)$$

where  $E_r^{(O)}$  — the electric field intensity component not depending on the radial coordinate  $r_1$ .

Substituting correlation (15) into boundary conditions (8) and (9) with account for (17), one obtains such expression for boundary condition (8):

$$e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n i n u_n e^{in\varphi_1} + \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n w_n e^{in\varphi_1} + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} d\varphi_1 = 0.$$

где  $C_n$  — неизвестные коэффициенты;  $k_{en}$  — волновое число среды внутри приемника.

Полное дифрагированное поле  $\Phi_\Sigma$  должно удовлетворять граничному условию (5) на плоской границе  $\Gamma_1$ . Тогда, по аналогии с выводами работ [2 3], в случае идеально податливой поверхности  $\Gamma_1$  связь между коэффициентами в выражениях (11) и (12) следует выбрать в виде:

$$e_n = (-1)^{n+1} a_{-n}; B_n = (-1)^{n+1} A_{-n}. \quad (14)$$

Оценим поведение пьезокерамической оболочки приемника. Для этого представим тангенциальные  $u$  и нормальные  $w$  составляющие перемещений оболочки в виде рядов по собственным формам колебаний оболочек в вакууме:

$$u = \sum_n u_n e^{in\varphi_1}; w = \sum_n w_n e^{in\varphi_1} \quad (15)$$

где  $u_n$  и  $w_n$  — неизвестные коэффициенты разложений.

Для отыскания коэффициентов  $u_n$  и  $w_n$  необходимо воспользоваться уравнением (2) и условием сопряжения полей (6) и (7) на криволинейной границе  $\Gamma_2$ . Из первого уравнения системы (2) на основе свойств полноты и ортогональности систем функций  $e^{in\varphi}$  на интервале  $[0, 2\pi]$  вытекает такая связь между коэффициентами  $u_n$  и  $w_n$ :

$$u_n = F_n w_n, n = -\infty, 0, \infty \quad (16)$$

$$\text{где } F_n = i \frac{n + \beta n^3}{(1 + \beta)n^2 - \omega^2 \alpha \gamma}; \beta = \frac{h^2}{12r_0^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E e_{33}^S} \right);$$

$$\alpha = \frac{r_{10}^2}{C_{11}^E}.$$

Рассмотрим входящий во второе уравнение системы (2) член  $E_r^{(O)}$ , для чего воспользуемся электрическими граничными условиями в виде (8) и (9).

Известно [1], что для нормальных компонент электрической индукции  $D_r$  и напряженности электрического поля  $E_r = E_r^{(O)} + \eta E_r^{(1)}$  в цилиндрической пьезокерамической оболочке с радиальной поляризацией справедливы приближенные соотношения:

$$D_r = D_r^{(O)} = e_{31} \left( \frac{1}{r_{10}} \frac{\partial u}{\partial \varphi_1} + \frac{w}{r_{10}} \right) + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)}, \quad (17)$$

где  $E_r^{(O)}$  — составляющая напряженности электрического поля, не зависящая от радиальной координаты  $r_1$ .

Подставив соотношение (15) в граничные условия (8) и (9) с учетом (17), получим для граничного условия (8) выражение:

$$e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n i n u_n e^{in\varphi_1} + \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n w_n e^{in\varphi_1} + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} d\varphi_1 = 0.$$



Hence,

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} w_0 + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} 2\pi = 0;$$

moreover, the electric field intensity in the piezoceramic shell and the electric potential on the electrodes of the receiver only depend on the amplitude  $w_0$  of the pulsative oscillations of the shell:

$$E_r^{(O)} = \frac{-e_{31}}{r_{10} \varepsilon_{33}^S} w_0. \quad (18)$$

Considering that there is correlation [1]  $E_r^{(O)} = -\frac{\Psi}{h}$  between the constant component of the electric intensity  $E_r^{(O)}$  and the difference of the electric potentials  $\Psi$  on the electrodes of the receiver's transducer, we will obtain the following expression:

$$\Psi = \frac{e_{31} h}{r_{10} \varepsilon_{33}^S} w_0.$$

For electrical boundary condition (9), we will have the following:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n i n u_n e^{in\varphi_1} + \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n w_n e^{in\varphi_1} + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} d\varphi_1 = \frac{\Psi}{Z_{эл}}.$$

Then,

$$\Psi = \frac{i\omega e_{31} w_0 2\pi Z_{эл}}{\left( i\omega r_{10} 2\pi \varepsilon_{33}^S \frac{Z_{эл}}{h} - 1 \right)}. \quad (19)$$

At that,

$$E_r^{(O)} = \frac{\Psi}{h} = -\frac{i\omega e_{31} w_0 2\pi}{\left( i\omega r_{10} 2\pi \varepsilon_{33}^S \frac{Z_{эл}}{h} - 1 \right)} \frac{Z_{эл}}{h} \quad (20)$$

Let us now apply the dynamic and kinematic conditions of the fields conjugation at the curved interface  $\Gamma_2$  to determine the coefficients of the expansions of the acoustic fields (11)–(13). To do this, all acoustic fields should be presented in the local coordinates of the array receiver. The shift of the coordinate system is carried out with the help of the addition theorems for cylindrical wave functions [4]. In our case, they take the following form:

$$\begin{aligned} J_m(kr_2) e^{im\varphi_2} &= \\ &= \sum_n J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}; \\ H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\varphi_2} &= \\ &= \sum_n H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}, \end{aligned}$$

where  $\varphi_{21}$  — polar coordinates of the origin  $O_1$  in the system with the origin  $O_2$ .

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} w_0 + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} 2\pi = 0$$

и напряженность электрического поля в пьезокерамической оболочке, и электрический потенциал на электродах преобразователя зависят только от амплитуды  $w_0$  пульсирующих колебаний оболочки:

$$E_r^{(O)} = \frac{-e_{31}}{r_{10} \varepsilon_{33}^S} w_0. \quad (18)$$

Учитывая, что между постоянной составляющей электрической напряженности  $E_r^{(O)}$  и разницей электрических потенциалов  $\Psi$  на электродах преобразователя приемника существует связь [1] в виде  $E_r^{(O)} = -\frac{\Psi}{h}$ , получим:

$$\Psi = \frac{e_{31} h}{r_{10} \varepsilon_{33}^S} w_0.$$

Для электрического граничного условия (9) будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} \left( \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n i n u_n e^{in\varphi_1} + \frac{e_{31}}{r_{10}} \sum_n w_n e^{in\varphi_1} + \varepsilon_{33}^S E_r^{(O)} \right) r_{10} d\varphi_1 = \frac{\Psi}{Z_{эл}}.$$

Тогда

$$\Psi = \frac{i\omega e_{31} w_0 2\pi Z_{эл}}{\left( i\omega r_{10} 2\pi \varepsilon_{33}^S \frac{Z_{эл}}{h} - 1 \right)}. \quad (19)$$

При этом

$$E_r^{(O)} = \frac{\Psi}{h} = -\frac{i\omega e_{31} w_0 2\pi}{\left( i\omega r_{10} 2\pi \varepsilon_{33}^S \frac{Z_{эл}}{h} - 1 \right)} \frac{Z_{эл}}{h} \quad (20)$$

Применим теперь динамические и кинематические условия сопряжения полей на криволинейной границе  $\Gamma_2$  для определения коэффициентов разложения звуковых полей (11)–(13). Для этого необходимо все звуковые поля представить в локальных координатах приемника антенны. Перенос системы координат осуществляется с помощью теорем сложения для волновых цилиндрических функций [4]. В нашем случае они приобретают вид:

$$\begin{aligned} J_m(kr_2) e^{im\varphi_2} &= \\ &= \sum_n J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}; \\ H_m^{(1)}(kr_2) e^{im\varphi_2} &= \\ &= \sum_n H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_{21}$  — полярные координаты начала  $O_1$  в системе с началом  $O_2$ .

Then, in the local coordinates  $O_1 X_1 Y_1$  of the array receiver, acoustic fields (11) and (12), which are connected with the plane  $\Gamma_1$  and the curved  $\Gamma_2$  interfaces respectively, take the following form with account for expression (4):

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(1)} &= \sum_n a_n J_n(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ &+ \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} \sum_n J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}; \\ \Phi_{\Sigma}^{(2)} &= \sum_n A_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ &+ \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} \sum_n H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}. \end{aligned}$$

Algebraization of functional equation (6) on the basis of the properties of completeness and orthogonality of the  $e^{im\varphi_1}$  function systems on the interval  $[\Phi, 2\pi]$  allows obtaining the following equation:

$$\begin{aligned} icw_n - A_n H_n^{(1)'}(kr_1) - \\ - \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n'(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} = \\ = + \left\{ a_n J_n'(kr_1) + \right. \\ \left. + \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} J_{m-n}(2kH_{II}) J_n'(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} \right\}, \\ n = -\infty, 0, \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

A similar procedure with functional equation (7) leads to such correlation:

$$icw_m - C_m J_m'(k_{ai} r_1'') = 0, \quad m = -\infty, 0, \infty. \quad (22)$$

Upon that, let us use boundary condition (6) and the second equation of system (2). Their algebraization enables obtaining the following expression:

$$\begin{aligned} w_n R_n + \frac{e_{31} r_{10}}{C_{11}^E} E_r^{(O)} - \frac{i\omega\alpha}{h} \rho_1 C_n J_n(k_{en} r_1'') + \\ + \frac{i\omega\alpha\rho}{n} A_n H_n^{(1)}(kr_1') + \\ + \frac{i\omega\alpha\rho}{n} \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1') e^{i(m-n)\varphi_{21}} = \\ = - \frac{i\omega\alpha\rho}{n} a_n J_n(kr_1') - \\ - \frac{i\omega\alpha\rho}{n} \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1') e^{i(m-n)\varphi_{21}}, \\ n = -\infty, 0, \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

where

$$R_n = \frac{(n + n^3\beta)^2 - (1 + \beta_n^4 - \omega^2\alpha\gamma)[(1 + \beta)n^2 - \omega^2\alpha\gamma]}{(1 + \beta)n^2 - \omega^2\alpha\gamma},$$

and  $E_r^{(O)}$  is determined by correlations (18) and (20).

Тогда в локальных координатах  $O_1 X_1 Y_1$  приемника антенны звуковые поля (11) и (12), связанные соответственно с плоской  $\Gamma_1$  и криволинейной  $\Gamma_2$  границами, с учетом выражения (4) приобретут вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma}^{(1)} &= \sum_n a_n J_n(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ &+ \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} \sum_n J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}; \\ \Phi_{\Sigma}^{(2)} &= \sum_n A_n H_n^{(1)}(kr_1) e^{in\varphi_1} + \\ &+ \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} \sum_n H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} e^{in\varphi_1}. \end{aligned}$$

Алгебраизация функционального уравнения (6) на основе свойств полноты и ортогональности систем функций  $e^{im\varphi_1}$  на интервале  $[\Phi, 2\pi]$  позволяет получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} icw_n - A_n H_n^{(1)'}(kr_1) - \\ - \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n'(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} = \\ = + \left\{ a_n J_n'(kr_1) + \right. \\ \left. + \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} J_{m-n}(2kH_{II}) J_n'(kr_1) e^{i(m-n)\varphi_{21}} \right\}, \\ n = -\infty, 0, \infty. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогичная операция с функциональным уравнением (7) приводит к соотношению:

$$icw_m - C_m J_m'(k_{ai} r_1'') = 0, \quad m = -\infty, 0, \infty. \quad (22)$$

Далее воспользуемся граничным условием (6) и вторым уравнением системы (2). Их алгебраизация позволяет получить выражение:

$$\begin{aligned} w_n R_n + \frac{e_{31} r_{10}}{C_{11}^E} E_r^{(O)} - \frac{i\omega\alpha}{h} \rho_1 C_n J_n(k_{en} r_1'') + \\ + \frac{i\omega\alpha\rho}{n} A_n H_n^{(1)}(kr_1') + \\ + \frac{i\omega\alpha\rho}{n} \sum_m (-1)^{m+1} A_{-m} H_{m-n}^{(1)}(2kH_{II}) J_n(kr_1') e^{i(m-n)\varphi_{21}} = \\ = - \frac{i\omega\alpha\rho}{n} a_n J_n(kr_1') - \\ - \frac{i\omega\alpha\rho}{n} \sum_m (-1)^{m+1} a_{-m} J_{m-n}(2kH_{II}) J_n(kr_1') e^{i(m-n)\varphi_{21}}, \\ n = -\infty, 0, \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$R_n = \frac{(n + n^3\beta)^2 - (1 + \beta_n^4 - \omega^2\alpha\gamma)[(1 + \beta)n^2 - \omega^2\alpha\gamma]}{(1 + \beta)n^2 - \omega^2\alpha\gamma},$$

а  $E_r^{(O)}$  определяется соотношениями (18) и (20).

The system of equations (21) and (23) for determining unknown coefficients of expansion  $w_n$ ,  $A_n$ ,  $C_n$  is basically an infinite system of linear algebraic equations. Substitution of the coefficients  $A_n$  and  $C_n$  with new unknowns by the formulae  $\tilde{A}_n = A_n H_n^{(1)}(kr_1')$  and  $\tilde{C}_n = C_n J_n'(k_{en} r_1'')$  enables transforming this infinite system of equations to the quasi-regular type and applying the successive approximation method and the truncation method for its solution.

All the elements of expressions (21)–(23) have a clear physical meaning. The free elements of expressions (21) and (23) describe the diffraction of a plane wave on a hard cylinder located near a plane interface. Unitary sums in correlations (21) and (23) describe the interaction between the FLTA transducers and the sea interface. It includes the multiplier  $H_{m-m}^{(1)}(2kH_{II})$ , which depends on the distance between the transducers and the interface; the increase of the distance reduces the multiplier and makes the impact of their interaction weaker. The element of system (23) containing the multiplier  $E_r^{(O)}$  reflects the procedure of transformation of the mechanical oscillations of the FLTA transducers at their disturbance by the arriving plane wave, piezoceramic shells of the transducers at their radial polarization into electrical oscillations.

**CONCLUSIONS.** The coefficients of expansion of acoustic and mechanical fields, which were obtained from the solution of infinite systems of equations (21)–(23), allows calculating the electrical and acoustic fields generated by the FLTA when it is towed near the sea surface. Comparing them with the fields generated by the FLTA in the deep sea without interfaces allows determining the changes in the FLTA fields which are caused by its operation near the sea surface. Knowing these changes, one can perform a quantitative assessment of the loss in the effectiveness of the system “HAS-SS” with FLTA and identify possible ways to neutralize the impact of the sea surface.

### Список литературы

- [1] **Гринченко, В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость [Текст] / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга — К. : Наукова думка, 1989. — 280 с.
- [2] **Гузь, А. Н.** Дифракция упругих волн в многосвязных телах [Текст] / А. Н. Гузь, В. Т. Головин. — К. : Наукова думка, 1972. — 254 с.
- [3] **Гузь, А. Н.** Гидроупругость систем оболочек [Текст] / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, А. Э. Бабаев. — К. : Высшая школа, 1984. — 208 с.
- [4] **Иванов, Э. А.** Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Э. А. Иванов. — Минск : Наука и техника, 1968. — 584 с.
- [5] **Лейко, А. Г.** Звуковые поля пьезокерамических излучателей с различным пьезоэффектом [Текст] / А. Г. Лейко, А. И. Нижник, Я. В. Старовойт // Электроника и связь. — 2013. — № 5. — С. 50–55.
- [6] **Лейко, А. Г.** Акустические свойства цилиндрических пьезокерамических излучателей силовой и компенсированной конструкции с продольным и поперечным пьезоэффектами [Текст] / А. Г. Лейко, А. И. Нижник, Я. В. Старовойт // Электроника и связь. — 2013. — № 6. — С. 62–73.
- [7] **Лейко, А. Г.** Аналитические исследования физических полей гидроакустических станций с линейными протяженными буксируемыми антеннами вблизи морского дна [Текст] / А. Г. Лейко, А. В. Дерепя // Судостроение и морская инфраструктура. — 2015. — № 1(3). — С. 142–151.

Система уравнений (21) и (23) для определения неизвестных коэффициентов разложения  $w_n$ ,  $A_n$ ,  $C_n$  представляет собой бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Замена коэффициентов  $A_n$  и  $C_n$  новыми неизвестными по формулам  $\tilde{A}_n = A_n H_n^{(1)}(kr_1')$  и  $\tilde{C}_n = C_n J_n'(k_{en} r_1'')$  позволяет преобразовать эту бесконечную систему уравнений к виду квазирегулярной и применить для ее решения метод последовательных приближений или метод усечения.

Все члены выражений (21)–(23) имеют ясный физический смысл. Свободные члены в выражениях (21) и (23) описывают дифракцию плоской волны на жестком цилиндре, расположенном вблизи плоской границы. Одинарные суммы в соотношениях (21) и (23) характеризуют взаимодействие между преобразователями ГПБА и морской границей. В нее входит множитель  $H_{m-m}^{(1)}(2kH_{II})$ , зависящий от расстояния между преобразователями и границей, при увеличении которого этот множитель уменьшается, и влияние взаимодействия ослабляется. Член системы (23), содержащий множитель  $E_r^{(O)}$ , отражает операцию преобразования механических колебаний преобразователей ГПБА при возбуждении их приходящей плоской волной, пьезокерамическими оболочками преобразователей при их радиальной поляризации в электрические колебания.

**ВЫВОДЫ.** Полученные в результате решения бесконечных систем уравнений (21)–(23) коэффициенты разложения акустических и механических полей позволяет рассчитать электрические и акустические поля, формируемые ГПБА при буксировании ее вблизи морской поверхности. Сопоставление их с полями, которые линейная ГПБА формирует в глубоком море, не имеющем границ, позволяет установить те изменения полей ГПБА, которые обусловлены эксплуатацией ее вблизи морской поверхности. Знание этих изменений дает возможность выполнить количественные оценки ухудшения эффективности системы «ГАС-НК» с ГПБА и определить возможные пути нейтрализации влияния морской поверхности.