

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет кораблебудування  
імені адмірала Макарова

**О. Г. Руденко, Ю. Г. Золотий**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ЗБІРНИК  
ЗАВДАНЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ  
РОБІТ З ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ  
СИСТЕМИ**

*Рекомендовано Методичною радою НУК*

Миколаїв 2006

УДК 531.8

**Руденко О.Г., Золотий Ю.Г.** Методичні рекомендації та збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з динаміки механічної системи. – Миколаїв: НУК, 2006. – 72 с.

*Кафедра* теоретичної механіки

Збірник складається з п'яти завдань для розрахунково-графічних робіт (РГР), які охоплюють загальні теореми динаміки і аналітичну механіку.

Кожна з РГР містить в собі по 30 варіантів. Наведено методичні рекомендації до виконання РГР і приклади розв'язання задач. Для всіх варіантів РГР надаються відповіді.

Збірник може бути використано в учбовому процесі на всіх факультетах денної, заочної та дистанційної форми навчання.

*Рецензент* канд. фіз.-мат. наук, доц. В.П. Фролов

## Розділ 1

### ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

#### Задача 1.1. Застосування теореми про зміну кінетичного моменту при дослідженні обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Плоска однорідна пластина масою  $m_1 = 100$  кг обертається навколо нерухомої осі  $Z$  з кутовою швидкістю  $\omega_0 = 2$  рад/с; при цьому в точці  $A$  каналу  $AB$  знаходиться нерухоме відносно пластини тіло  $K$  масою  $m_2 = 10$  кг. В певний момент часу тіло  $K$  (самохідний механізм) починає рухатись по каналу, приходить у точку  $B$  з відносною швидкістю  $v_r = 2$  м/с і залишає пластину. В цю мить при  $t_0 = 0$  на пластину починає діяти гальмівна пара сил, момент якої є сталим (варіанти 5, 11, 16, 23, 29), залежить від часу  $t$  (варіанти 4, 9, 10, 15, 17, 21, 22, 27, 28), від кутової швидкості  $\dot{\varphi}$  пластини (варіанти 2, 3, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26) або від кута її обертання  $\varphi$  (варіанти 1, 6, 12, 18, 24, 30) (вважати, що при  $t_0 = 0$   $\varphi_0 = 0$ ).

Визначити кутову швидкість  $\omega_B$  обертання пластини при  $t_0 = 0$ , проміжок часу  $\tau$  від початку гальмування до моменту, коли її кутова швидкість зменшиться вдвічі, та кут  $\varphi_1$ , на який повернулася пластина від початку гальмування до повної зупинки.

Необхідні дані наведені в табл. 1.1, а варіанти форми пластин зображені на рис. 1.1.1. Всі величини визначаються в одиницях СІ.

Таблиця 1.1

Варі-ант	$R,$	$r,$	$\alpha,$ град	$M_r,$ Н·м	Варі-ант	$R,$	$r,$	$\alpha,$ град	$M_r,$ Н·м
	м					м			
1	1	0,7	–	$-50 \varphi$	16	1	–	–	$-2$
2	0,87	1	–	$-3 \dot{\varphi}$	17	$\sqrt{3}$	1	–	$-2(t+1)$
3	1	0,2	–	$-30/\dot{\varphi}$	18	1	–	60	$-10 \dot{\varphi}$

Продовж. табл. 1.1

Вари- ант	$R$ ,	$r$ ,	$\alpha$ , град	$M_r$ , Н·м	Вари- ант	$R$ ,	$r$ ,	$\alpha$ , град	$M_r$ , Н·м
	м					м			
4	1	0,5	30	$-5t$	19	1	-	-	$-8\dot{\phi}$
5	1	0,7	-	$-10$	20	1	-	-	$-20/\dot{\phi}$
6	1	0,5	30	$-25\phi$	21	1	-	-	$-3(t+2)$
7	1	-	30	$-\dot{\phi}$	22	1	0,7	-	$-1,5t$
8	1	0,5	60	$-10/\dot{\phi}$	23	0,5	0,2	-	$-5$
9	1,2	0,9	60	$-5(t+5)$	24	$\sqrt{3}$	1	-	$-5\phi$
10	1	1	-	$-2t$	25	0,5	0,25	-	$-30\dot{\phi}$
11	1	-	-	$-15$	26	0,5	0,25	-	$-8/\dot{\phi}$
12	1	0,5	-	$-30\phi$	27	1	0,3	60	$-(t+5)$
13	0,5	0,3	-	$-1,5\dot{\phi}$	28	1	-	-	$-0,1t$
14	1	-	-	$-35/\dot{\phi}$	29	1	-	-	$-3$
15	1	0,5	-	$-12t$	30	1	0,2	-	$-60$

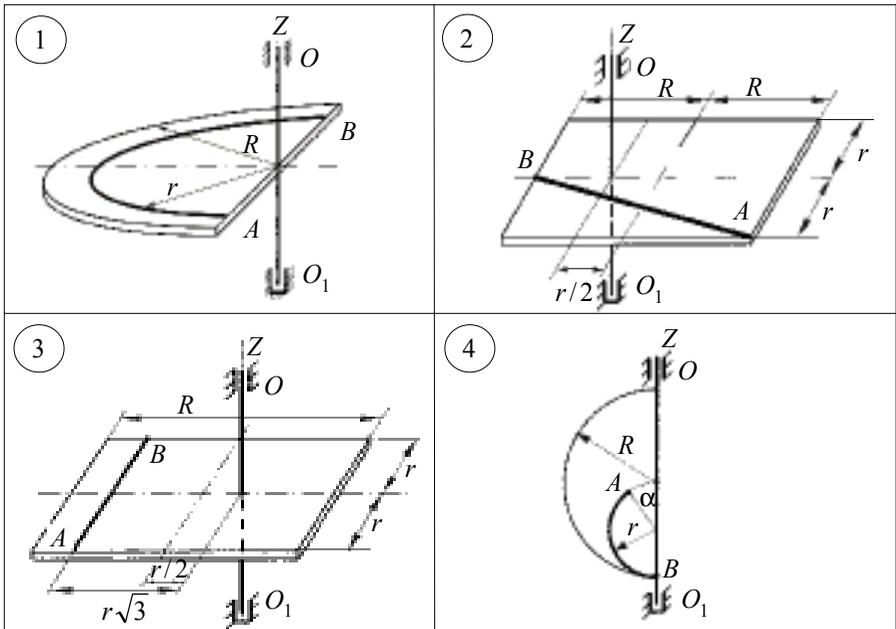


Рис. 1.1.1

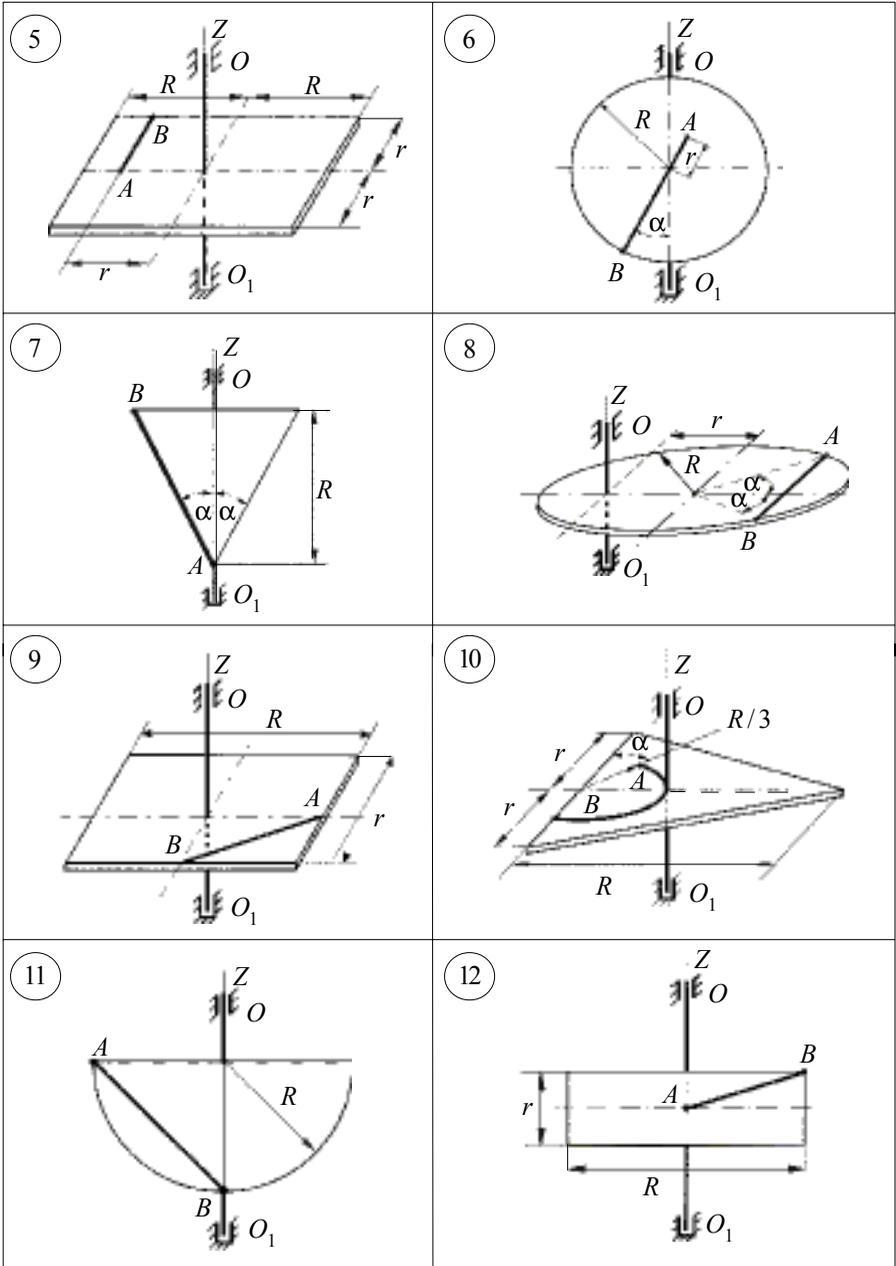


Рис. 1.1.1 (продовження)

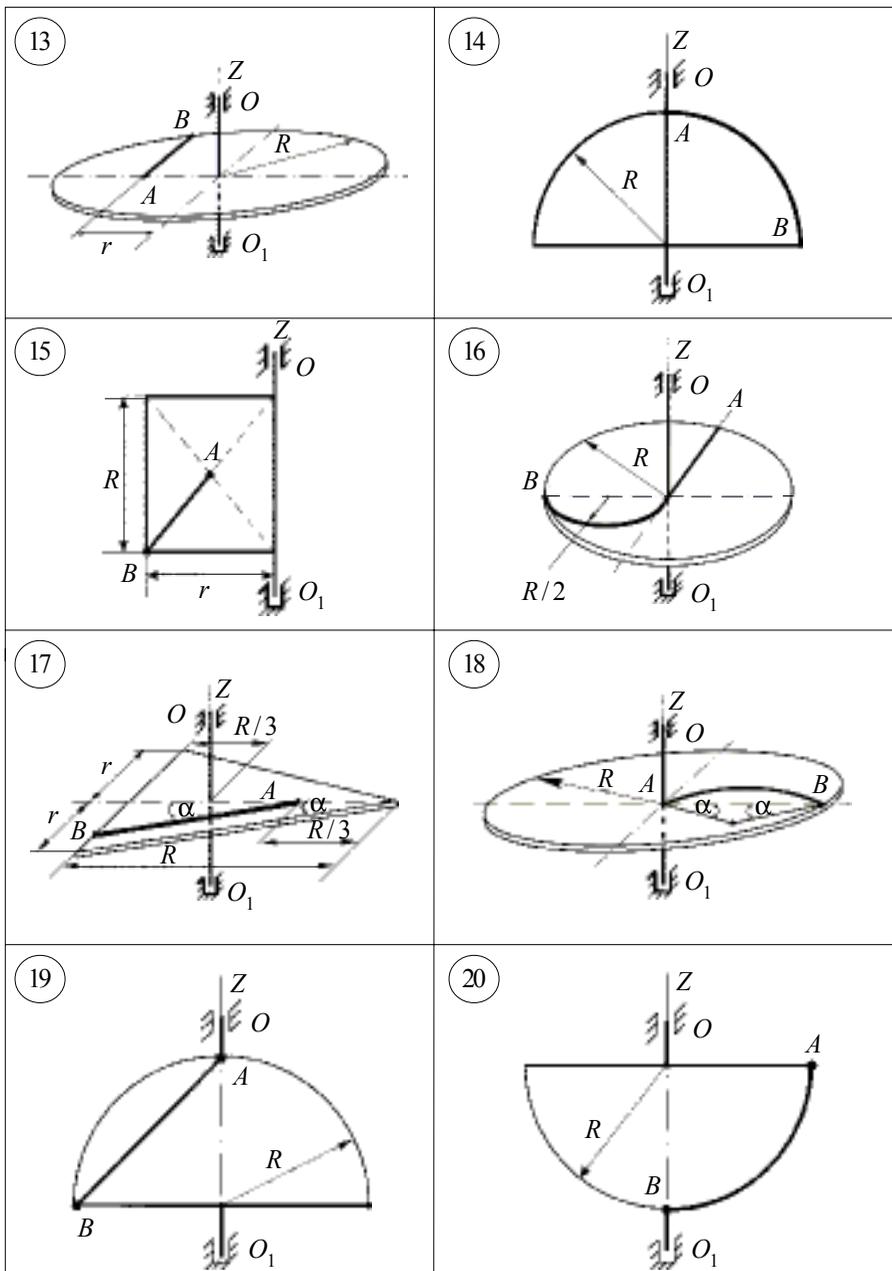


Рис. 1.1.1 (продовження)

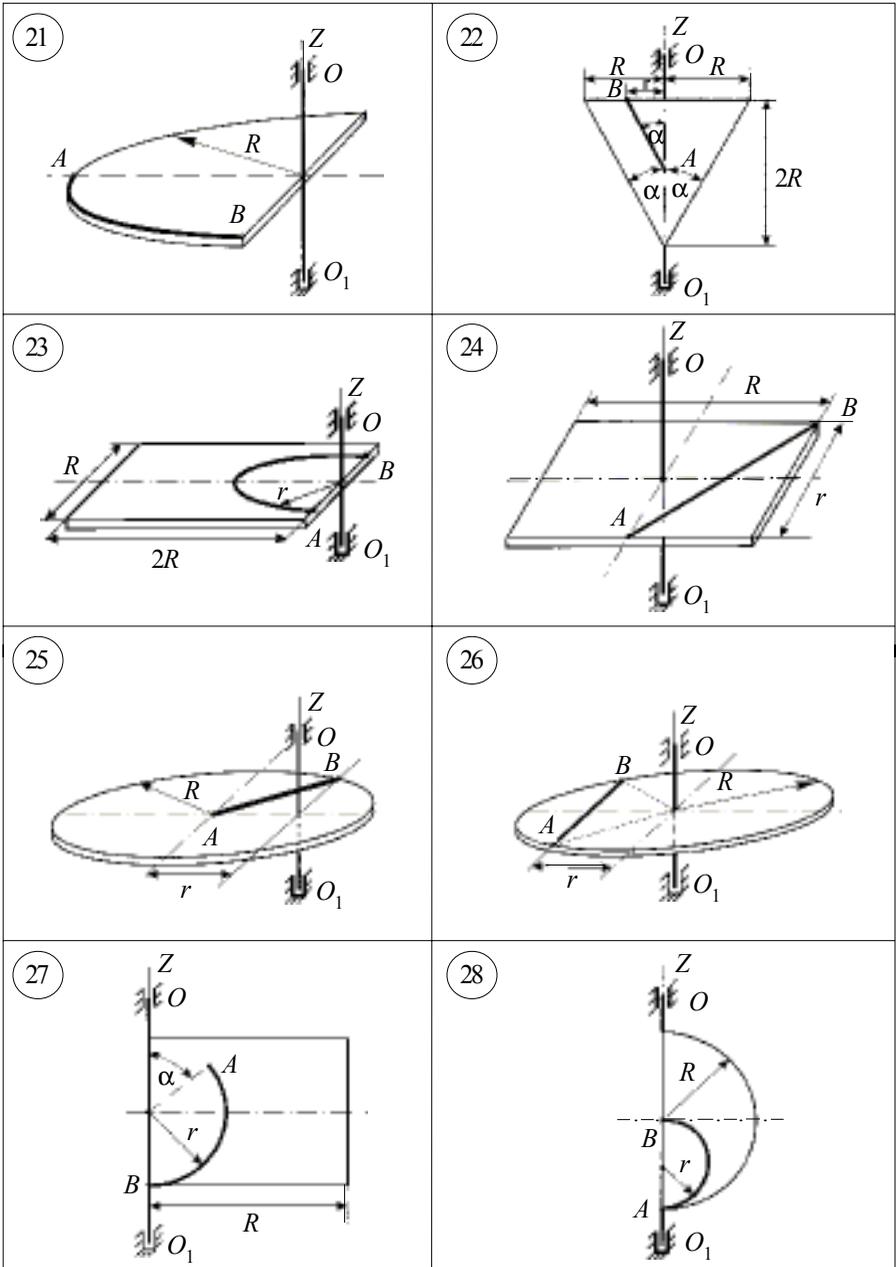


Рис. 1.1.1 (продовження)

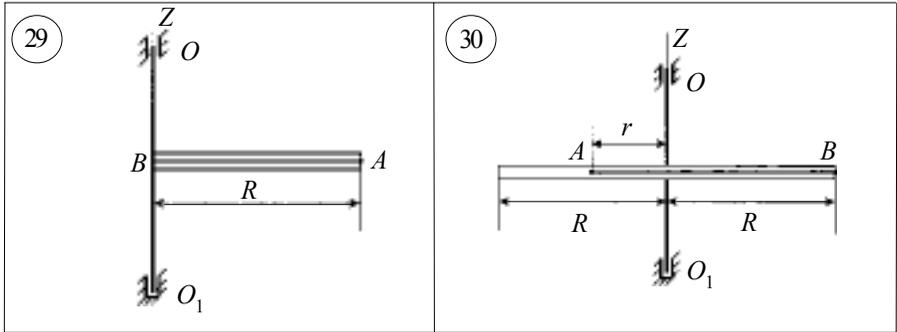


Рис. 1.1.1 (продовження)

**Приклад виконання завдання (рис. 1.1.2)**

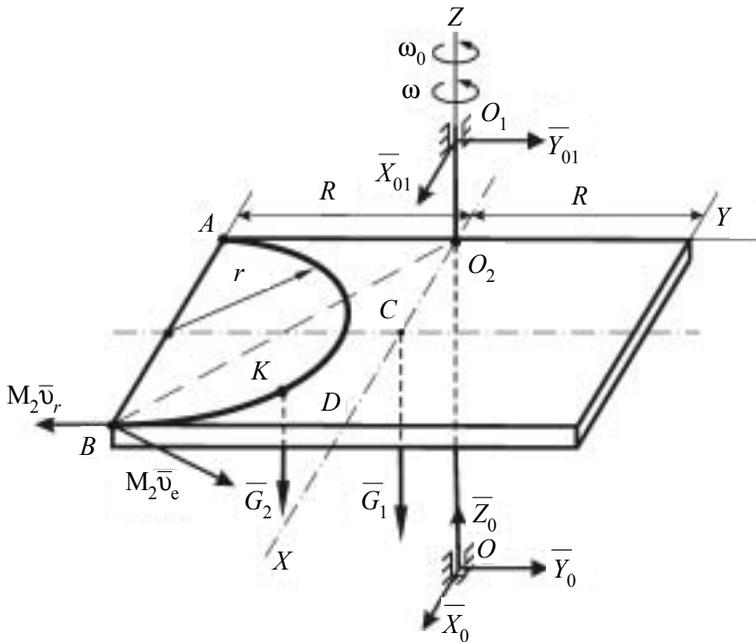


Рис. 1.1.2

Дано:  $m_1 = 100$  кг;  $m_2 = 10$  кг;  $R = 0,4$  м;  $r = 0,15$  м;  $\omega_0 = 2$  рад/с;  $v_r = 2$  м/с;  
 $M_T = -0,347(t + 5)$  (Н·м).

Знайти:  $\omega_B$ ,  $\varphi_\tau$ ,  $\tau$ .

### Розв'язок

1. Спочатку розглянемо першу стадію руху даної механічної системи, а саме: пластина обертається навколо нерухомої вертикальної осі  $Z$ , а тіло  $K$  рухається по каналу  $AB$  (див. рис. 1.1.2). Запишемо для цієї системи теорему про зміну її кінетичного моменту відносно осі обертання  $Z$ :

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^e, \quad (1)$$

де  $L_Z$  – кінетичний момент системи відносно осі  $Z$ ;  $M_Z^e = \sum_{k=1}^n M_Z(\bar{F}_k^e)$  – головний момент діючих на систему зовнішніх сил відносно осі  $Z$ . На цьому етапі руху на тіла системи діють сили:  $\bar{G}_1$  – сила тяжіння пластини;  $\bar{G}_2$  – сила тяжіння тіла  $K$ ;  $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$  – реакції підп'ятника  $O$ ;  $\bar{X}_{01}, \bar{Y}_{01}$  – реакції підшипника  $O_1$ .

Жодна з цих сил не створює моменту відносно осі  $Z$ . Це означає, що  $M_Z^e = 0$ , а, з урахуванням рівності (1),  $L_Z = \text{const}$ . Тобто  $L_{Z_A} = L_{Z_B}$ , де  $L_{Z_A}$  і  $L_{Z_B}$  – кінетичні моменти системи в моменти часу, коли точка  $K$  знаходиться в положеннях  $A$  і  $B$  відповідно. В точці  $A$  відносна швидкість самохідного механізму  $K$  дорівнює нулю. Тому  $L_{Z_A}$  знайдемо, як кінетичний момент єдиного твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі  $Z$ :

$$L_{Z_A} = I_{Z_A} \cdot \dot{\varphi},$$

де  $I_{Z_A}$  – момент інерції механічної системи відносно осі  $Z$ , коли тіло  $K$  знаходиться в точці  $A$ .

Якщо відносно осі  $Z$  момент інерції пластини –  $I_{1_z}$ , а момент інерції матеріальної точки  $K$  –  $I_{2_z}$ , то

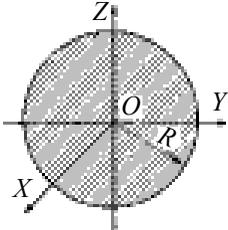
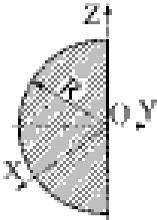
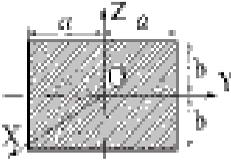
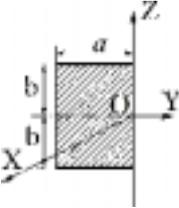
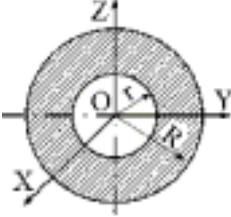
$$I_{Z_A} = I_{1_z} + I_{2_z}.$$

Використовуючи табл. 1.2, з урахуванням теореми Штейнера запишемо:

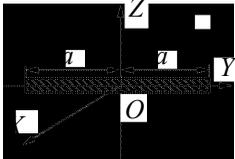
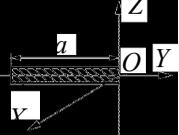
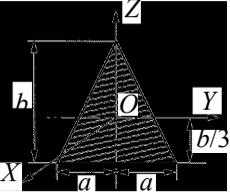
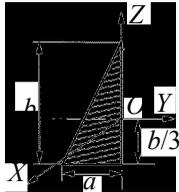
$$I_{1z} = \frac{m_1(R^2 + r^2)}{3} + m_1 r^2 = 8,33 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad I_{2z} = m_2(AO_2)^2 = 2,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Тоді  $I_{Z_A} = 10,83 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ;  $L_{Z_A} = 21,66 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ .

Таблиця 1.2

Рисунок	$I_x$	$I_y$	$I_z$	
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{2}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	

Продовж. табл. 1.2

Рисунок	$I_x$	$I_y$	$I_z$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

Коли тіло  $K$  знаходиться в точці  $B$ , то його абсолютна швидкість складається з відносної  $\bar{v}_r$  та переносної  $\bar{v}_e$  швидкостей. Тому для цього моменту часу покажемо два вектори кількості руху точки:  $m_2\bar{v}_r$  і  $m_2\bar{v}_e$ . Відповідно

$$L_{Z_B} = I_{1_z} \cdot \dot{\vartheta}_B + m_2 v_e \cdot BO_2 - m_2 v_r \cdot 2r.$$

Враховуючи, що  $v_e = \dot{\vartheta}_B \cdot BO_2$ , маємо:

$$L_{Z_B} = \omega_B (I_{1_z} + m_2 (BO_2)^2) - m_2 v_r \cdot 2r.$$

Прирівнюючи  $L_{Z_A}$  та  $L_{Z_B}$ , визначимо  $\omega_B$ :

$$\omega_B = \frac{L_{Z_A} + m_2 v_r \cdot 2r}{I_{1_z} + m_2 (BO_2)^2}; \quad \omega_B = 2,55 \text{ рад/с.}$$

2. Тепер розглянемо рух пластини від моменту часу  $t_0 = 0$ , коли її залишило тіло  $K$  і включилась гальмівна пара сил з моментом  $M_r$ , до моменту зупинки пластинки (рис. 1.1.3).

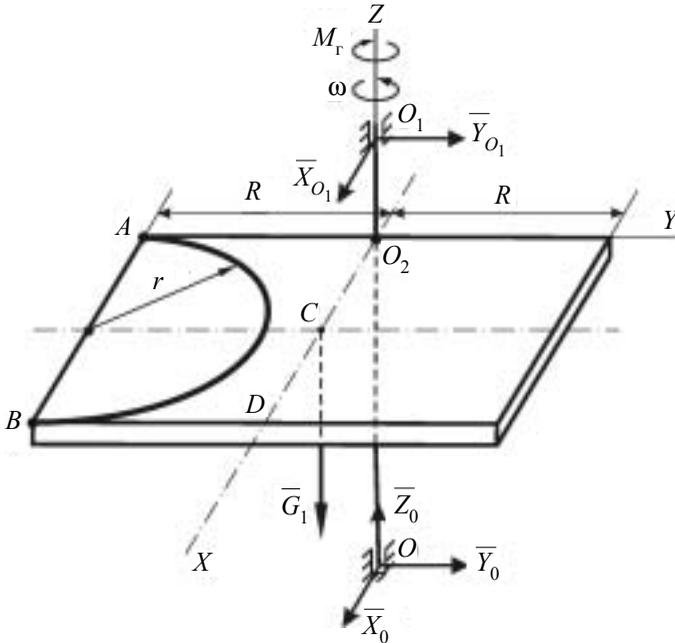


Рис. 1.1.3

У довільний момент часу пластинка обертається навколо нерухомої осі  $Z$  і має кінетичний момент  $L_Z = I_z \omega$ . Головний момент зовнішніх сил дорівнює гальмівному моменту  $M_r$ . Тоді, згідно з теоремою (1), маємо:

$$I_{1z} \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_r,$$

або

$$I_{1z} \ddot{\phi} = -0,347(t+5). \quad (2)$$

Вираз (2) являє собою диференціальне рівняння обертання пластини навколо нерухомої осі  $Z$ . Після інтегрування отримаємо:

$$\dot{\varphi} = \omega = -\frac{0,347}{I_{1z}} \left( \frac{t^2}{2} + 5t \right) + C_1; \quad (3)$$

$$\varphi = -\frac{0,347}{I_{1z}} \left( \frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{2} \right) + C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  визначимо з початкових умов:

$$t_0 = 0; \quad \varphi_0 = 0; \quad \dot{\varphi}_0 = \omega_B.$$

З рівнянь (3) і (4) знаходимо  $C_1 = \omega_B$ ,  $C_2 = 0$ .

Отже, залежності (3) і (4) з урахуванням значення  $I_{1z}$  стають такими:

$$\omega = \omega_B - 0,042 \left( \frac{t^2}{2} + 5t \right); \quad (5)$$

$$\varphi = \omega_B t - 0,042 \left( \frac{t^3}{2} + \frac{5t}{2} \right). \quad (6)$$

З рівняння (5) визначимо проміжок часу  $\tau$ , за який кутова швидкість пластини зменшиться вдвічі, та час  $t_k$ , що знадобиться для її повної зупинки:

$$\frac{\omega_B}{2} = \omega_B - 0,042 \left( \frac{\tau^2}{2} + 5\tau \right);$$

$$0 = \omega_B - 0,042 \left( \frac{t_k^2}{2} + 5t_k \right);$$

Розв'язавши ці квадратні рівняння відносно  $\tau$  та  $t_k$  і відкинувши від'ємні корені, як такі, що не мають фізичного змісту, отримаємо:  $\tau = 4,3$  с;  $t_k = 7,15$  с. Підставляючи  $t_k$  в залежність (6), знайдемо кут  $\varphi_1$  обертання пластини до її повної зупинки:

$$\varphi_1 = \omega_B t_k - 0,042 \left( \frac{t_k^3}{6} + \frac{5t_k^2}{2} \right); \quad \varphi_1 = 10,33 \text{ рад} = 590^\circ.$$

### Задача 1.2. Визначення кутової швидкості ведучої ланки механізму

Механічна система, розташована у вертикальній площині, під дією постійного моменту  $M$  починає рухатися зі стану спокою.

Враховуючи маси всіх ланок механізму і нехтуючи тертям, визначити кутову швидкість ведучої ланки механізму (кривошипа або колеса) при його переміщенні з початкового положення, що характеризується кутом  $\varphi_0$ , до положення, що характеризується кутом  $\varphi$ .

На рис. 1.2.1 зображені варіанти схем механізмів, а в табл. 1.3 наведені необхідні числові дані.

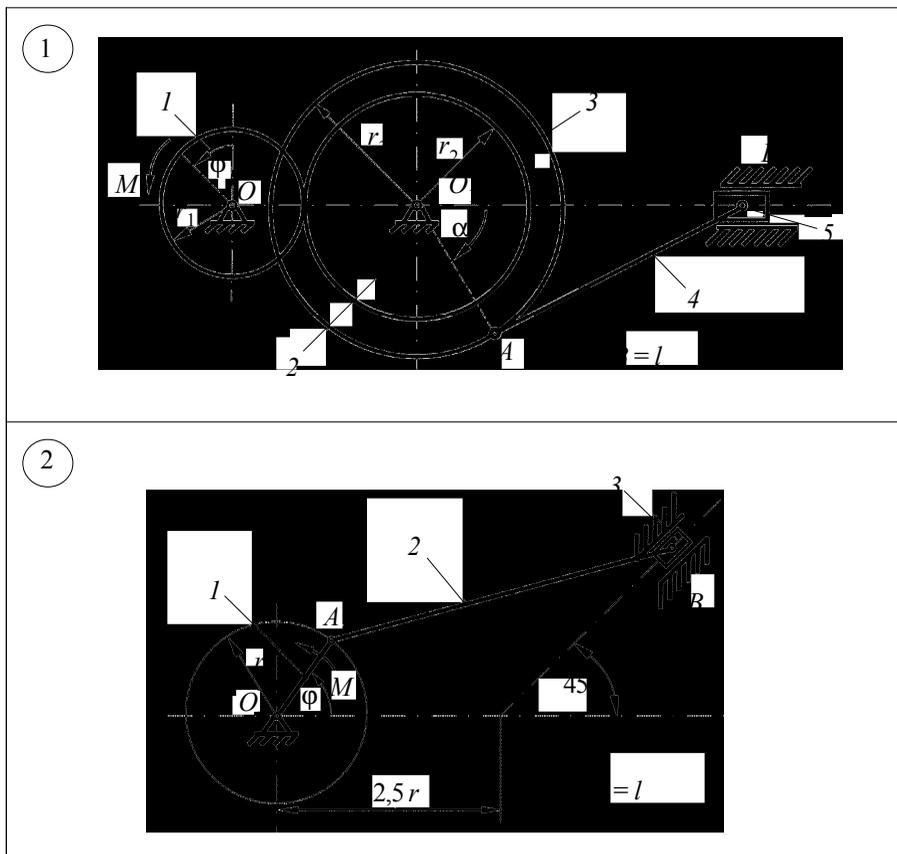


Рис. 1.2.1

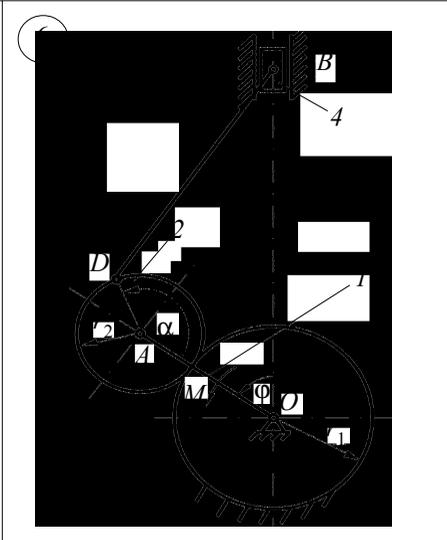
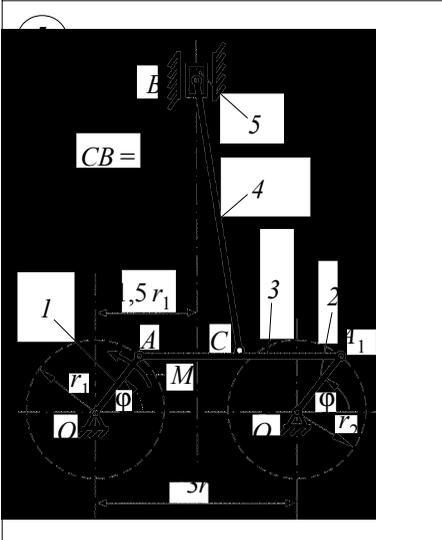
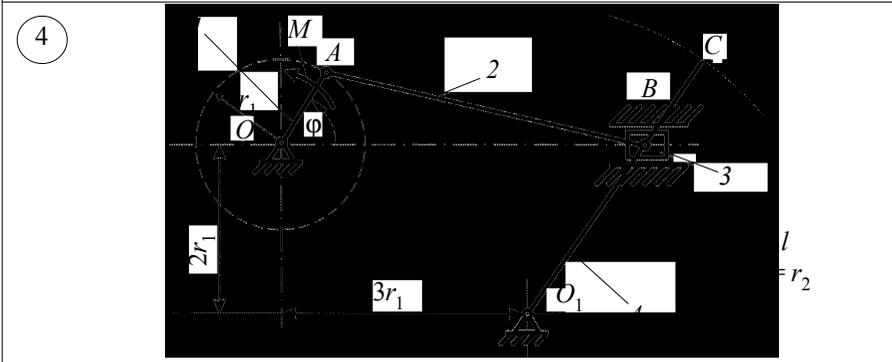
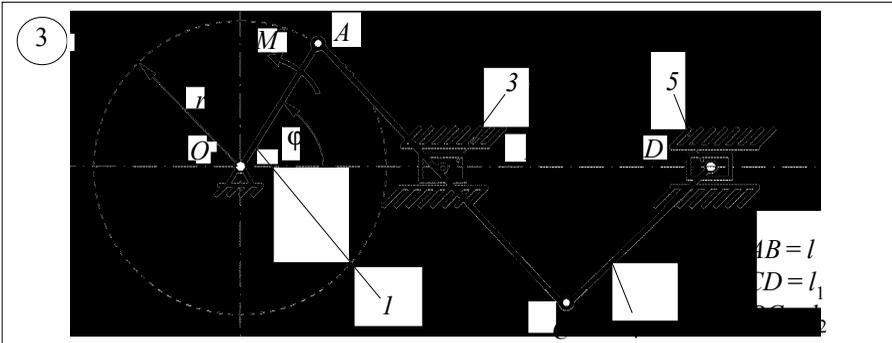


Рис. 1.2.1 (продовження)

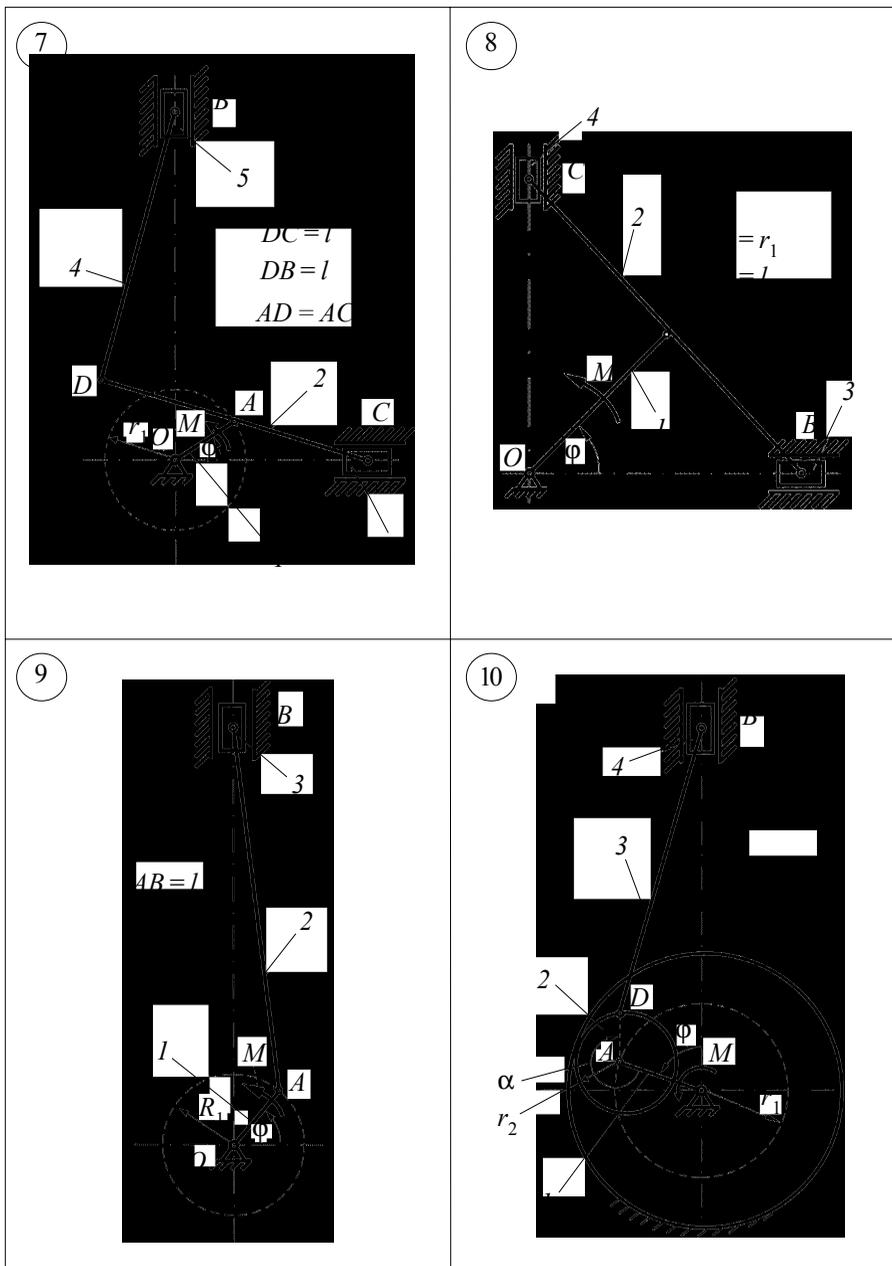


Рис. 1.2.1 (продовження)

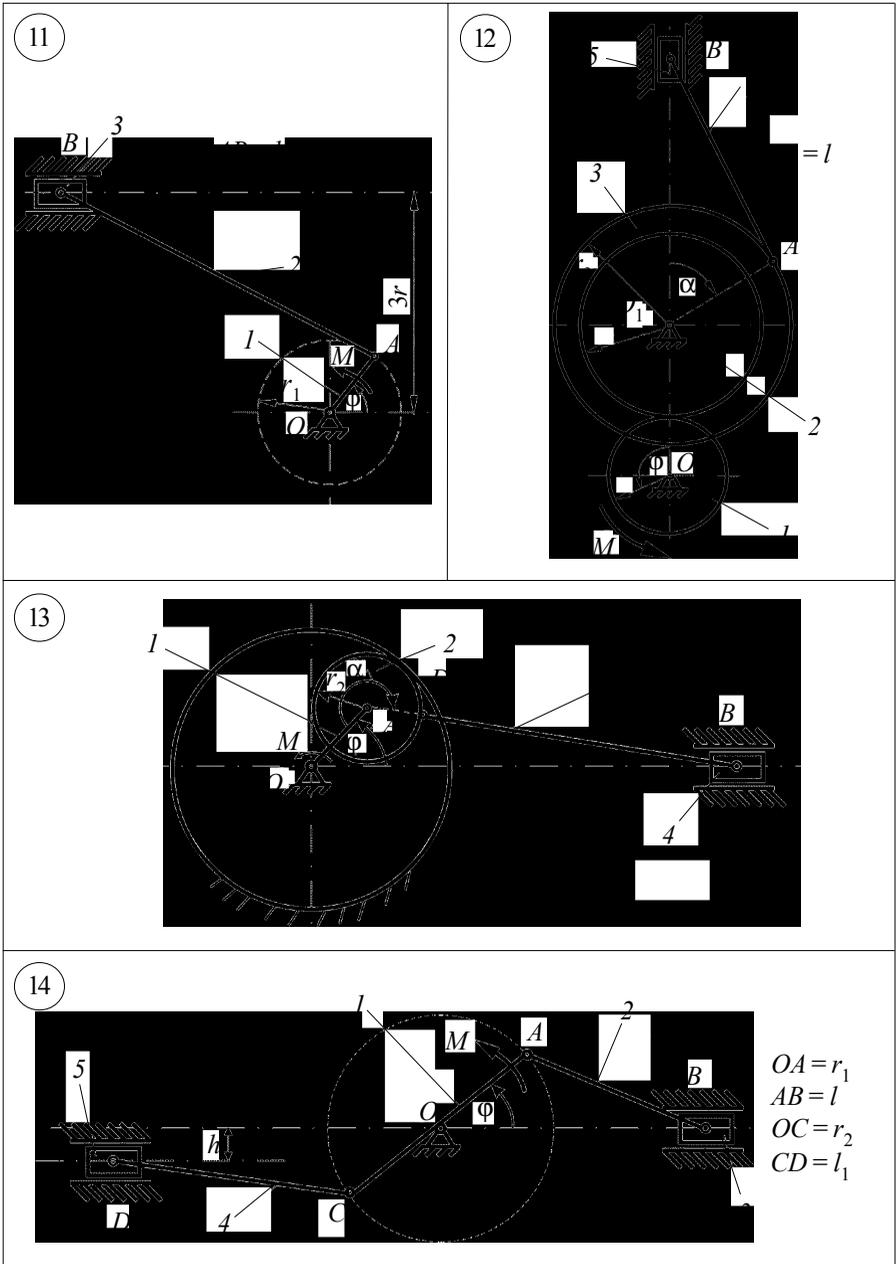
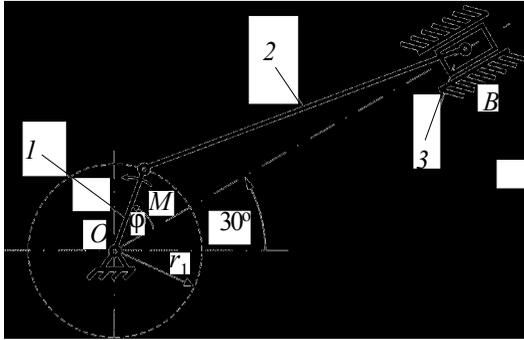


Рис. 1.2.1 (продовження)

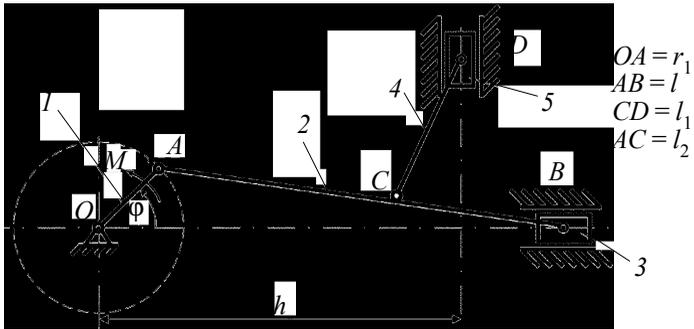


Рис. 1.2.1 (продовження)

19



20



21

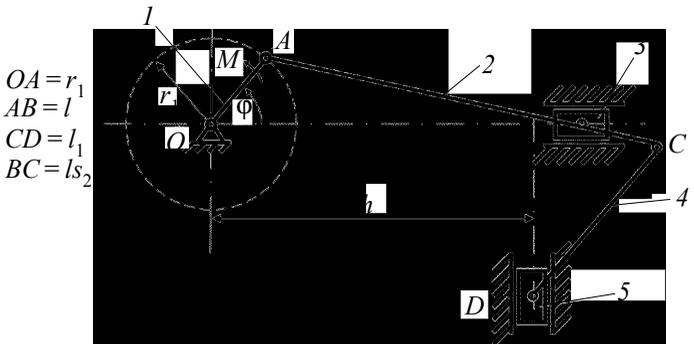
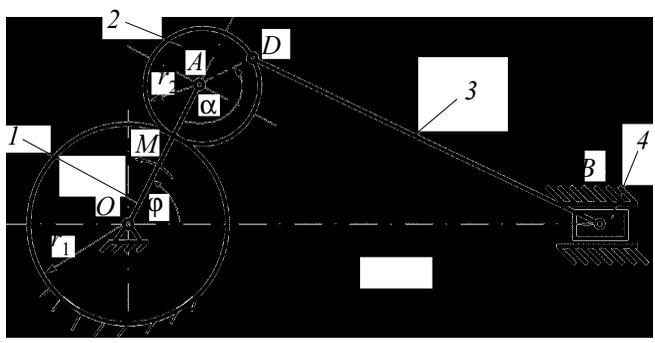
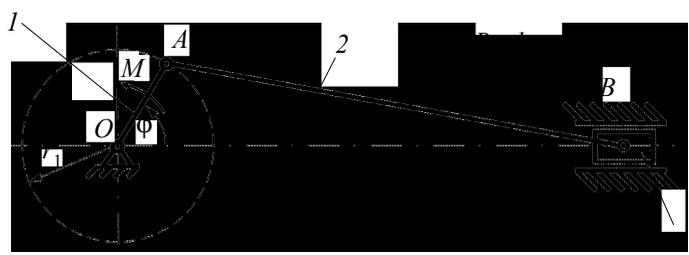


Рис. 1.2.1 (продовження)

22



23



24

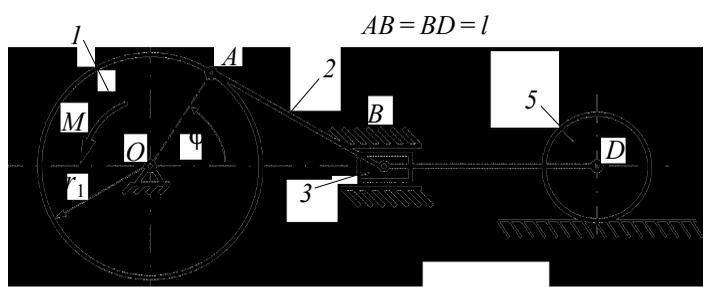


Рис. 1.2.1 (продовження)

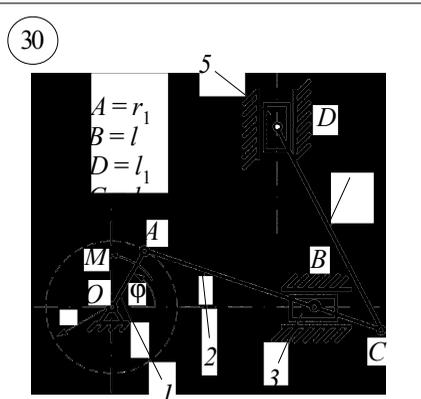
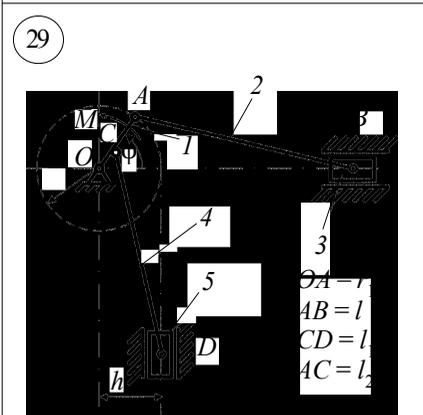
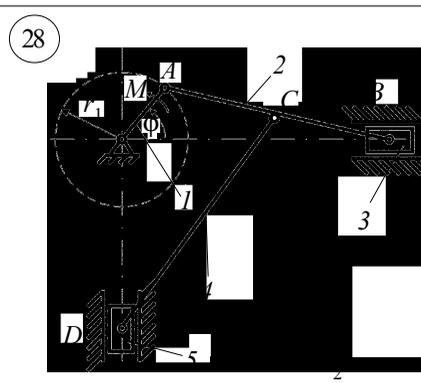
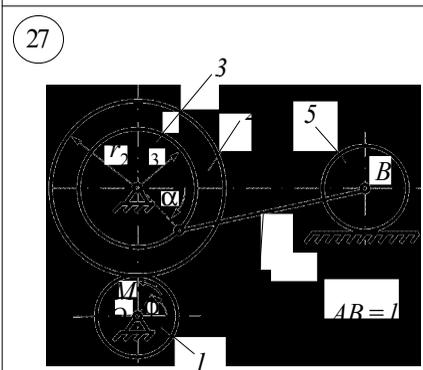
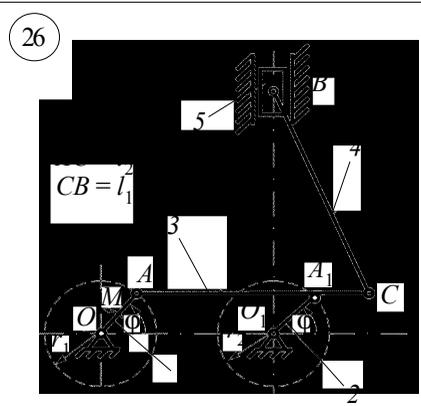
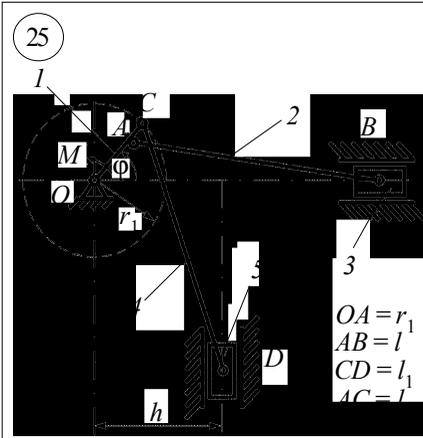


Рис. 1.2.1 (продовження)

Таблиця 1.3

Вари- ант	$\varphi$	$\varphi_0$	$\frac{r_1}{r}$	$\frac{r_2}{r}$	$\frac{r_3}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l_1}{r}$	$\frac{l_2}{r}$	$\frac{h}{r}$	$\frac{m_1}{m}$	$\frac{m_2}{m}$	$\frac{m_3}{m}$	$\frac{m_4}{m}$	$\frac{m_5}{m}$	$\frac{M}{mgr}$
1	$\pi$	0	1	4	3	9	-	-	-	1	6	5	3	2	5
2	$\pi/2$	0	1	-	-	5	-	-	-	1	5	2	-	-	10
3	$\pi$	$\pi/2$	1	-	-	4	3	0	-	1	4	2	3	2	10
4	$\pi/2$	0	1	-	-	4	4	-	-	1	8	2	9	-	50
5	$\pi/3$	0	1	1	-	4	-	-	-	1	1	3	4	1,5	240
6	$\pi$	$\pi/2$	2	1	-	5	-	-	-	3	6	4	1	-	10
7	$\pi/2$	0	1	-	-	4	4	-	-	1	8	2	8	2	200
8	$\pi/4$	0	1	-	-	2	-	-	-	1	2	0,5	0,5	-	5
9	$\pi/3$	0	1	-	-	4	-	-	-	1	4	1,5	-	-	12
10	$2\pi/3$	0	2	1	-	8	-	-	-	1	4	4	1	-	10
11	$\pi/6$	0	1	-	-	5	-	-	-	1	6	1	-	-	24
12	$5\pi/8$	0	2	1	5	10	-	-	-	8	6	10	10	4	80
13	$17\pi/8$	$\pi$	3	1	-	10	-	-	-	1	3	6	3	-	70
14	$\pi/2$	0	1	1,5	-	5	4	-	0,5	2,5	5	2	4	2	10
15	$\pi/6$	0	1	1	-	4	3	-	-	1	1	4	6	1,5	120
16	$\pi/2$	0	1	-	-	6	3	-	-	1	8	2	3	2	100
17	$\pi/2$	0	1	-	-	5	4	1	0,5	1	6	2	4	2	20
18	$\pi/2$	0	1	-	-	5	-	-	-	1	5	20	-	-	20
19	$\pi/6$	0	1	-	-	10	-	-	-	1	8	2	-	-	60
20	$\pi/2$	0	1	-	-	5	4	3	4	1	5	2	4	2	15
21	$\pi/2$	0	1	-	-	4	4	1	10/3	1	5	2	4	2	15
22	$3\pi/2$	$\pi$	3	2	-	9	-	-	-	1	10	3	2	-	25
23	$\pi/2$	0	1	-	-	5	-	-	-	1	5	1	-	-	20
24	$3\pi/4$	0	1	-	-	2	-	-	-	10	4	1	3	4	80

Продовж. табл. 1.3

Вари-ант	$\varphi$	$\varphi_0$	$\frac{r_1}{r}$	$\frac{r_2}{r}$	$\frac{r_3}{r}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{l_1}{r}$	$\frac{l_2}{r}$	$\frac{h}{r}$	$\frac{m_1}{m}$	$\frac{m_2}{m}$	$\frac{m_3}{m}$	$\frac{m_4}{m}$	$\frac{m_5}{m}$	$\frac{M}{mgr}$
25	$\pi/2$	0	1	-	-	3	4	1/3	0	4/3	3	2	4	2	35
26	$\pi/4$	0	1	1	-	4	4	-	-	1	1	8	8	2	200
27	$3\pi/8$	0	2	1	5	10	-	-	-	8	6	10	4	1	140
28	$\pi/2$	0	1	-	-	5	4	1	-	1	5	2	4	2	20
29	$\pi/2$	0	1	-	-	4,5	5	0,5	0,5	1	4,5	2	5	2	200
30	$\pi/2$	0	1	-	-	4	4	1	10/3	1	5	2	4	2	15

На схемах варіантів 1, 6, 10, 12, 13, 22, 27 куту  $\varphi_0 = 0$  відповідає кут  $\alpha_0 = 0$ , на схемах варіантів 6, 10, 13, 22 кут  $\alpha$  характеризує переміщення колеса 2 відносно кривошипа  $OA$ . Прямолинійні ланки механізму вважати однорідними стержнями, а колеса – однорідними дисками.

**Приклад виконання завдання**

Механізм, розташований у вертикальній площині, приводиться у рух зі стану спокою парою сил зі сталим моментом  $M$ , прикладеним до кривошипа  $OA$  (рис. 1.2.2).

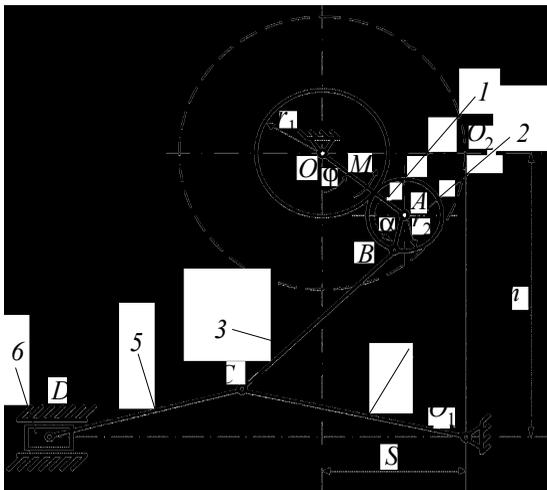


Рис. 1.2.2

Враховуючи маси всіх ланок механізму і нехтуючи тертям, визначити кутову швидкість кривошипа при переміщенні його з початкового положення, що характеризується кутом  $\varphi_0 = 0$ , у положення, яке характеризується кутом  $\varphi = \pi / 2$ , якщо  $r_1 = 2r$ ,  $r_2 = r$ ,  $BC = CO_1 = CD = l = 8r$ ,  $h = 9r$ ,  $S = 4r$ ,  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ ,  $m_3 = m_4 = m_5 = 4m$ ,  $m_6 = m$ ,  $M = 60mgr$ .

На рис. 1.2.2 кут  $\alpha$  характеризує переміщення колеса 2 відносно кривошипа  $OA$ , причому куту  $\varphi_0 = 0$  відповідає кут  $\alpha_0 = 0$ .

Прямолінійні ланки механізму вважати однорідними стержнями, а колесо 2 – однорідним диском.

### Розв'язок

Побудуємо положення механізму, що відповідає заданим кутам  $\varphi_0 = 0$  і  $\varphi = \pi / 2$ . Знайдемо зв'язок між кутами  $\alpha$  і  $\varphi$ .

Колесо 2 виконує складний рух: воно обертається відносно власної осі, що проходить через точку  $A$ , з відносною кутовою швидкістю  $\omega_r$ , і разом з кривошипом  $OA$  обертається навколо осі, яка проходить через точку  $O$ , з переносною кутовою швидкістю  $\omega$  (див. рис. 1.2.2).

Оскільки колесо 2 обертається навколо двох паралельних осей в одному й тому ж напрямку, то його абсолютна кутова швидкість

$$\omega_2 = \omega_r + \omega, \quad (1)$$

звідки

$$\omega_r = \omega_2 - \omega. \quad (2)$$

Враховуючи, що точка  $L$  – миттєвий центр швидкостей (МЦШ) колеса 2, отримаємо:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{\omega(r_1 + r_2)}{r_2} = 3\omega \quad (3)$$

З виразу (2), використовуючи співвідношення (3), маємо

$$\omega_r = 2\omega.$$

$$\text{Але } \omega_r = d\alpha / dt, \text{ а } \omega = d\varphi / dt, \text{ тоді } d\alpha = 2d\varphi; \int_0^\alpha d\alpha = 2 \int_0^\varphi d\varphi,$$

звідки  $\alpha = 2\varphi$ .

Так як кінцеве положення кривошипа характеризується кутом  $\varphi = \pi / 2$ , то кут  $\alpha = \pi$ .

На рис. 1.2.3 суцільними жирними лініями показано положення механізму при  $\varphi = \pi / 2$ , а штриховими – в початковий момент часу, тобто при  $\varphi = 0$ .

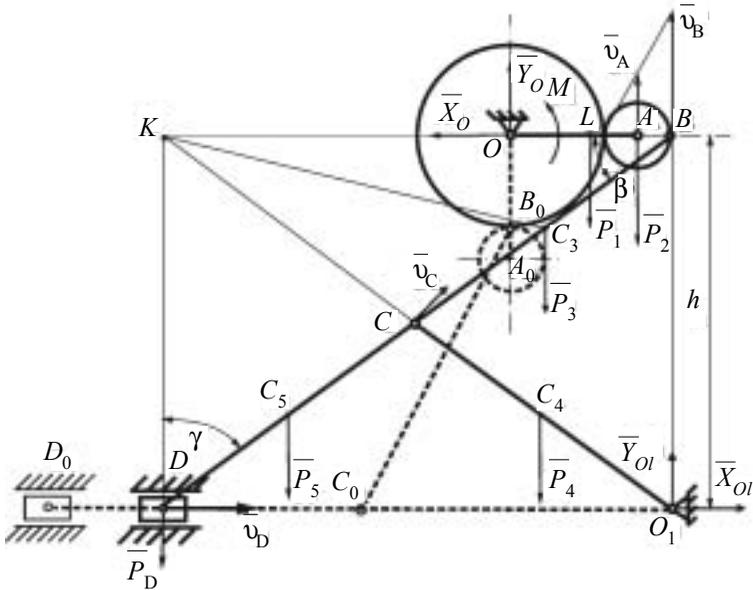


Рис. 1.2.3

Використаємо теорему про зміну кінетичної енергії системи

$$T - T_0 = A^e, \tag{4}$$

де  $T_0$  і  $T$  – кінетична енергія системи в початковому і кінцевому положеннях;  $A^e$  – сума робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на її кінцевому переміщенні.

В початковий момент (при  $\varphi = 0$ ) система знаходилась у стані спокою, тому  $T_0 = 0$  і вираз (4) приймає вигляд

$$T = A^e. \tag{5}$$

Визначимо кінетичну енергію системи в її кінцевому положенні. Так як система складається з шести ланок, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих ланок:

$$T = \sum_{K=1}^6 T_K. \tag{6}$$

Кінетична енергія  $T_1$  кривошипа  $OA$ , що обертається навколо осі, яка проходить через точку  $O$ , буде

$$T_1 = \frac{I_0 \omega^2}{2},$$

де  $I_0$  – момент інерції кривошипа відносно осі обертання, що проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка;  $\omega$  – кутова швидкість кривошипа.

Але  $I_0 = \frac{m_1(r_1 + r_2)^2}{3} = 3mr^2$ , тоді

$$T_1 = \frac{3mr^2 \omega^2}{2}. \quad (7)$$

Плоский рух колеса 2 можна вважати миттєвим обертанням навколо миттєвого центру швидкостей  $L$ . Тому кінетичну енергію  $T_2$  колеса 2 можна визначити з виразу

$$T_2 = \frac{I_L \omega^2}{2},$$

де  $I_L$  – момент інерції колеса 2 відносно осі, що проходить через точку  $L$  перпендикулярно до площини рисунка;  $\omega$  – абсолютна кутова швидкість колеса 2, що визначається з виразу (3).

Згідно з теоремою про моменти інерції твердого тіла відносно паралельних осей

$$I_L = \frac{m_2 r_2^2}{2} + m_2 r_2^2 = \frac{3m_2 r_2^2}{2} = 3mr^2.$$

Остаточно

$$T_2 = \frac{27mr^2 \omega^2}{2}. \quad (8)$$

Визначимо кінетичну енергію  $T_3$  шатуна  $BC$ .

Плоский рух шатуна  $BC$  можна розглядати як миттєве обертання навколо точки  $K$  – миттєвого центру швидкостей. Тому

$$T_3 = \frac{I_K \omega_3^2}{2},$$

де  $I_K$  – момент інерції шатуна  $BC$  відносно осі, що проходить через точку  $K$  перпендикулярно до площини рисунка;  $\omega_3$  – абсолютна кутова швидкість шатуна  $BC$ ;

$$I_K = \frac{m_3 BC^2}{12} + m_3 (KC_3)^2, \text{ а } \omega_3 = \frac{v_B}{BK}.$$

Знайдемо швидкість точки  $B$ . Враховуючи, що точка  $L$  є миттєвим центром швидкостей колеса 2, маємо  $v_B = 2v_A = 2\omega(r_1 + r_2) = 6\omega r$ .

Як видно з рис. 1.2.3

$$BK = \sqrt{(2l)^2 - h^2} = 5\sqrt{7} \cdot r;$$

$$(KC_3)^2 = BK^2 + BC_3^2 - 2BK \cdot BC_3 \cdot \cos\beta, \cos\beta = BK / 2l.$$

Остаточно  $KC_3 = 10,4r$ .

Тоді  $I_K = 435 mr^2$ , а  $\omega_3 = 0,455\omega$ .

Маємо  $T_3 = 44,8mr^2\omega^2$ . (9)

Коромисло  $CO_1$  виконує обертальний рух навколо нерухомої осі  $O_1$ , перпендикулярної до площини рисунка. Тому його кінетична енергія  $T_4$  визначиться з виразу

$$T_4 = \frac{I_{O_1} \omega_4^2}{2}$$

де  $I_{O_1}$  – момент інерції коромисла відносно осі  $O_1$ ;  $\omega_4$  – кутова швидкість коромисла;

$$I_{O_1} = \frac{m_4 l^2}{3} = \frac{256}{3} mr^2, \text{ а } \omega_4 = \frac{v_c}{CO_1}.$$

Зі співвідношення  $\frac{v_c}{CK} = \frac{v_B}{BK}$  маємо  $v_c = \frac{CK}{BK} v_B = 3,64\omega \cdot r$ ; отже,  $\omega_4 = 0,455\omega$ .

Остаточно

$$T_4 = 8,8mr^2\omega^2. \quad (10)$$

Шатун  $DC$  виконує плоский рух. Для нього миттєвим центром швид-

костей також є точка  $K$ . Тому рух шатуна  $DC$  будемо розглядати як миттєве обертання навколо точки  $K$ .

Тоді кінетична енергія  $T_5$  шатуна  $CD$  визначиться з формули

$$T_5 = \frac{I'_K \omega_5^2}{2},$$

де  $I'_K$  – момент інерції шатуна  $CD$  відносно осі, що проходить через точку  $K$  перпендикулярно до площини рисунка;  $\omega_5$  – абсолютна кутова швидкість шатуна  $CD$ ;

$$I'_K = \frac{m_5 CD^2}{12} + m_5 (KC_5)^2, \text{ а } \omega_5 = \frac{v_C}{CK} = \omega_4 = 0,455\omega.$$

Як видно з рис. 1.2.1, варіант 2,

$$(KC_5)^2 = h^2 + (DC_5)^2 - 2h \cdot DC_5 \cos \gamma, \quad \cos \gamma = \frac{h}{2l}.$$

Тоді  $(KC_5)^2 = 56,5r^2$ , а  $I'_K = 247,3mr^2$ .

Остаточно

$$T_5 = 25,5mr^2\omega^2 \quad (11)$$

Кінетична енергія  $T_6$  повзуна  $D$ , який виконує поступальний рух, визначиться з виразу  $T_6 = \frac{m_6 v_D^2}{2}$ .

Згідно зі співвідношенням  $\frac{v_D}{v_C} = \frac{DK}{CK}$  маємо  $v_D = \frac{DK}{KC} v_C = 4,1\omega \cdot r$ .

Тоді

$$T_6 = 8,4mr^2\omega^2. \quad (12)$$

Підставляючи вирази (7)–(12) у вираз (6), отримаємо значення кінетичної енергії системи

$$T_6 = 102,5mr^2\omega^2. \quad (13)$$

Визначимо роботу, яка виконується зовнішніми силами на кінцевому переміщенні при зміні кута  $\varphi$  від нуля до  $\pi/2$ . Роботу виконують момент

$M$  і сили тяжіння  $P_1, P_2, \dots, P_5$ :

$$A^e = \sum_{K=0}^5 A_K. \quad (14)$$

Робота  $A_0$ , яка виконується моментом  $M$ :

$$A_0 = M(\varphi - \varphi_0) = 94,2mgr. \quad (15)$$

Робота  $A_1$  сили тяжіння  $P_1$  кривошипа  $OA$ :

$$A_1 = -0,5 P_1(r_1 + r_2) = -1,5mgr. \quad (16)$$

Робота  $A_2$  сили тяжіння  $P_2$  колеса 2:

$$A_2 = -P_2(r_1 + r_2) = -6mgr. \quad (17)$$

Робота  $A_3$  сили тяжіння  $P_3$  шатуна  $BC$ :

$$A_3 = -P_3 h_3,$$

де  $h_3$  – вертикальне переміщення центру тяжіння  $C_3$  шатуна  $BC$ ,

$$h_3 = \frac{h+r_1}{2} - \frac{h}{4} = \frac{1}{4}(h+2r_1) = 3,25r.$$

Тоді

$$A_3 = -13mgr. \quad (18)$$

Робота  $A_4$  і  $A_5$  сил тяжіння  $P_4$  і  $P_5$  відповідно коромисла  $CO_1$  і шатуна  $DC$ :

$$A_4 = -P_4 h_4 = -9mgr; \quad (19)$$

$$A_5 = -P_5 h_5 = -9mgr, \quad (20)$$

де  $h_4$   $h_5 = h / 4$  – вертикальне переміщення центрів тяжіння  $C_4$  і  $C_5$  коромисла  $CO_1$  і шатуна  $CD$ .

Робота сили тяжіння  $P_6$  повзуна  $D$  дорівнює нулю, тому що повзун переміщується перпендикулярно дії сили  $P_6$ .

Підставляючи значення виразів (15)–(20) у вираз (14), одержимо роботу, яка виконується зовнішніми силами,

$$A^e = 55,7mgr. \quad (21)$$

Тоді з виразу (5), використовуючи вирази (13) і (21), отримаємо

$$\omega^2 = 0,545g / r.$$

## Розділ 2

### АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА

#### Задача 2.1. Визначення сили, яку розвиває прес

На рис. 2.1.1 зображено варіанти різноманітних кінематичних схем пресів, що приводяться в дію моментом  $M$  або силою  $F$ , прикладеними до ведучої ланки механізму.

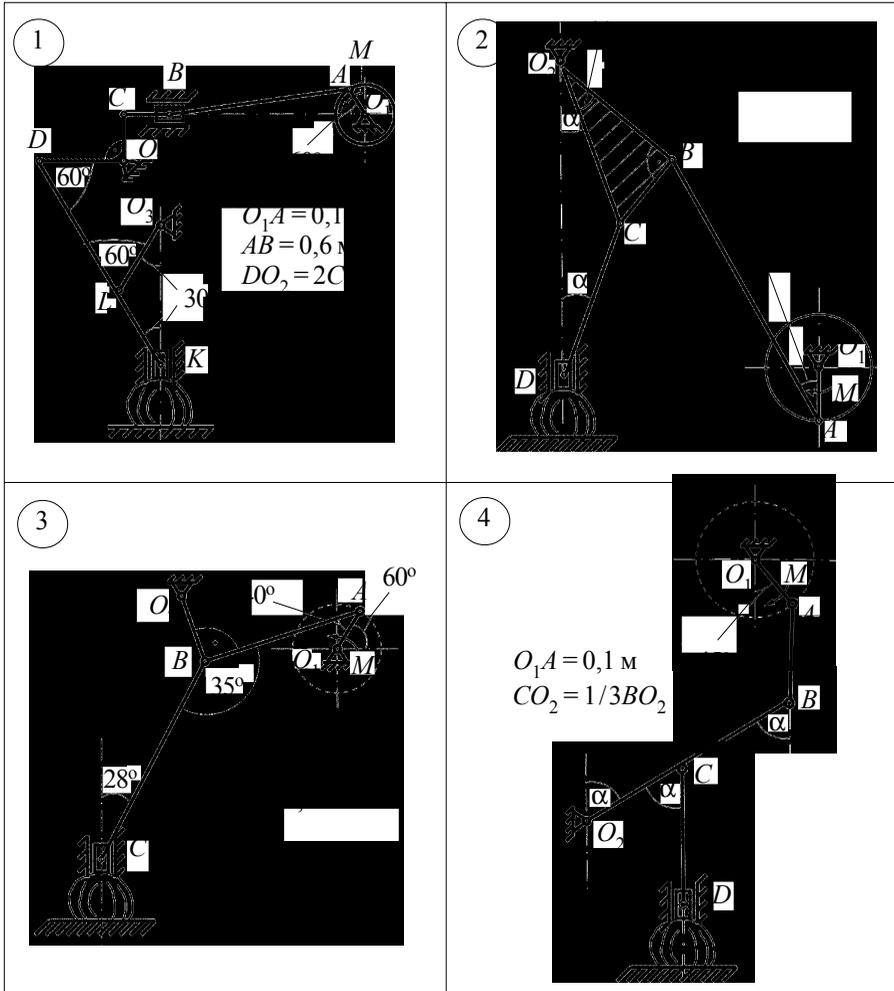


Рис. 2.1.1

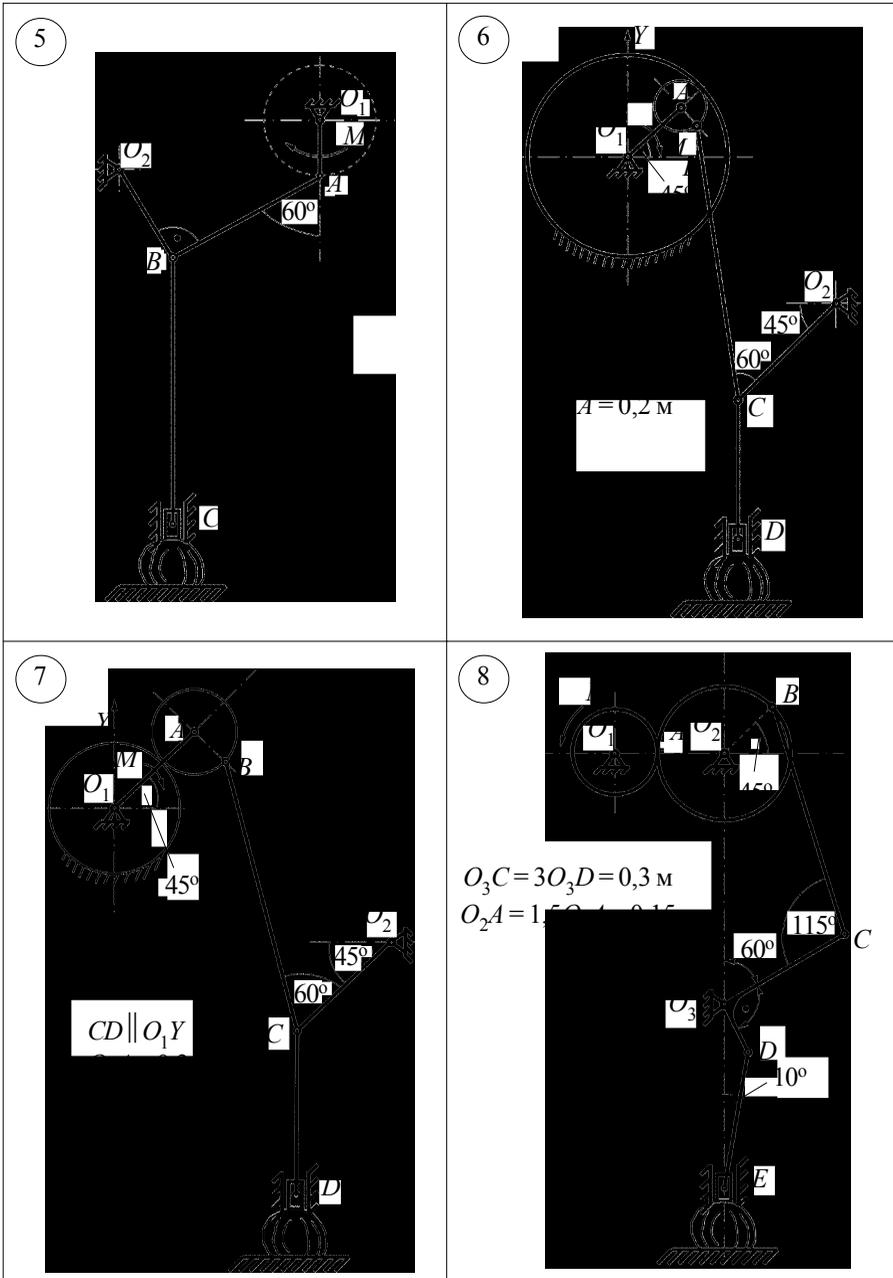


Рис. 2.1.1 (продовження)

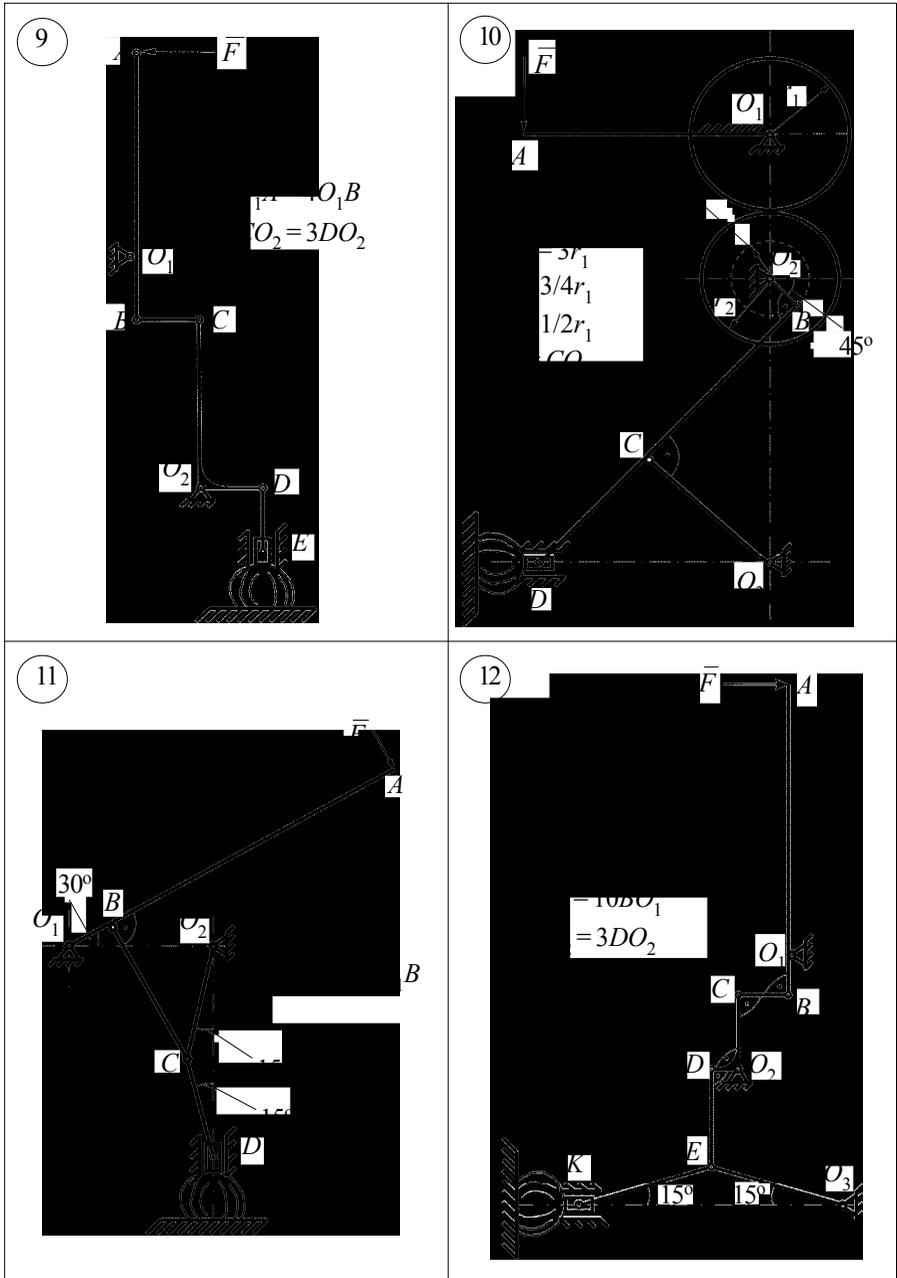


Рис. 2.1.1 (продовження)

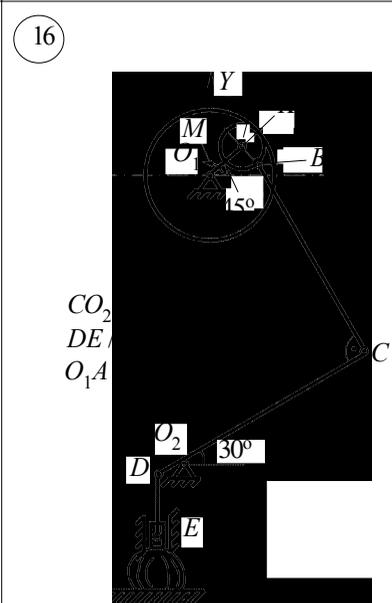
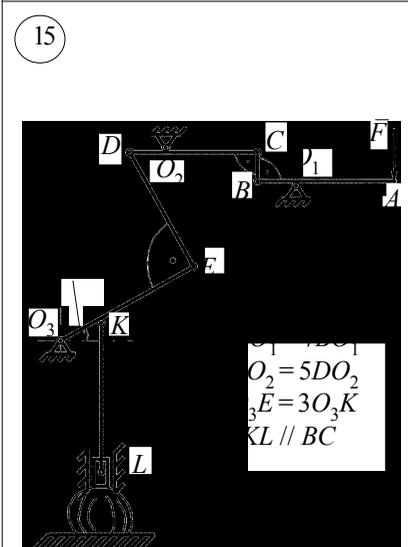
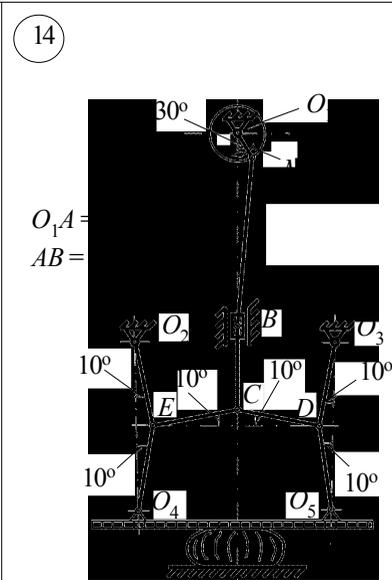
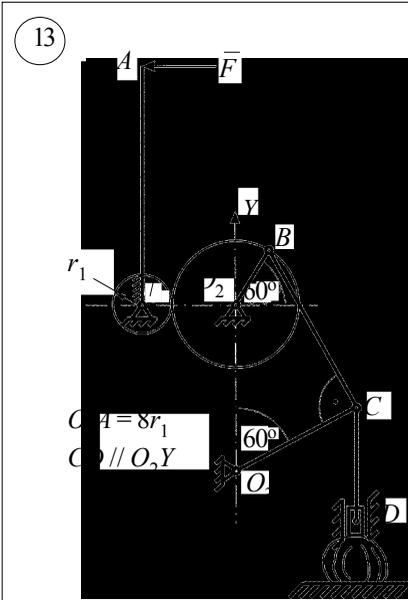


Рис. 2.1.1 (продовження)

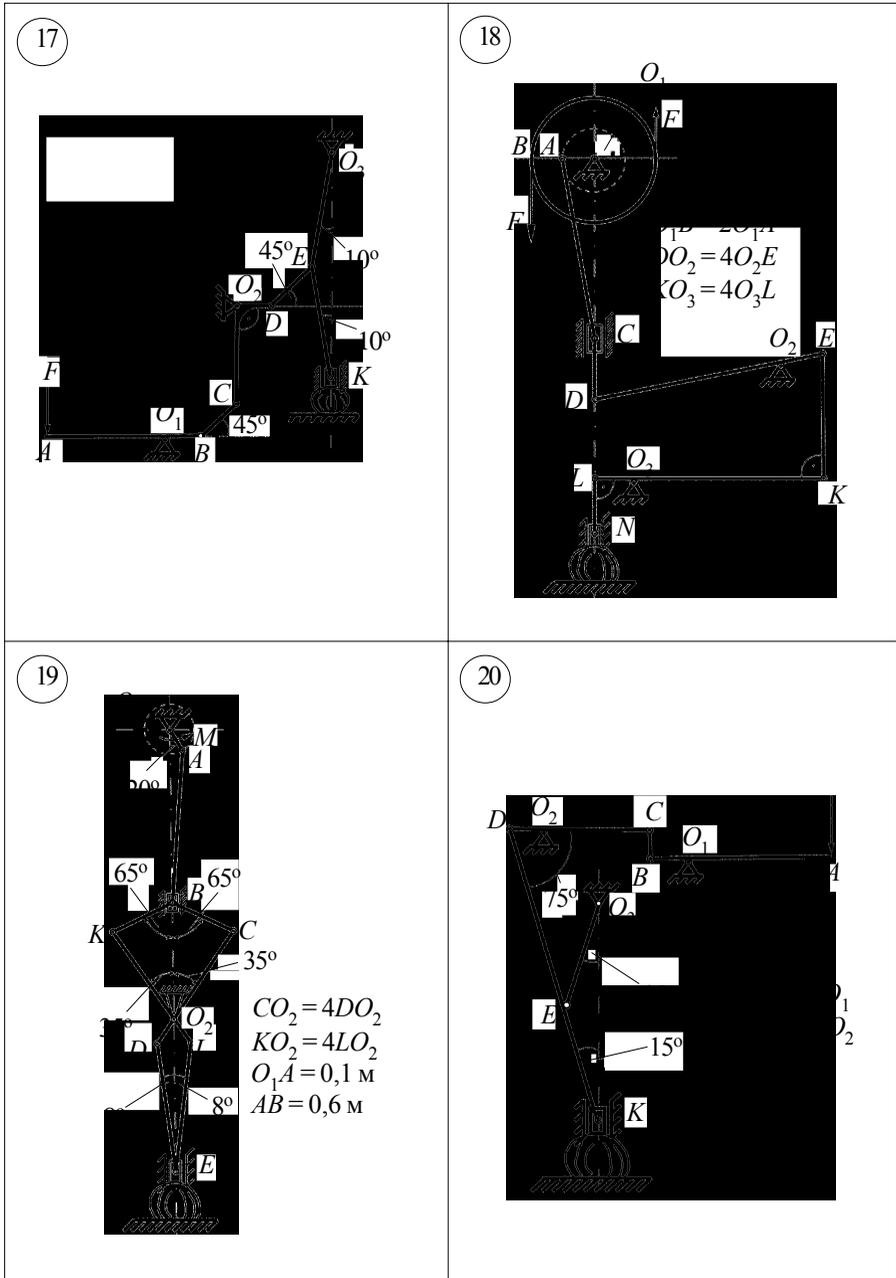


Рис. 2.1.1 (продовження)

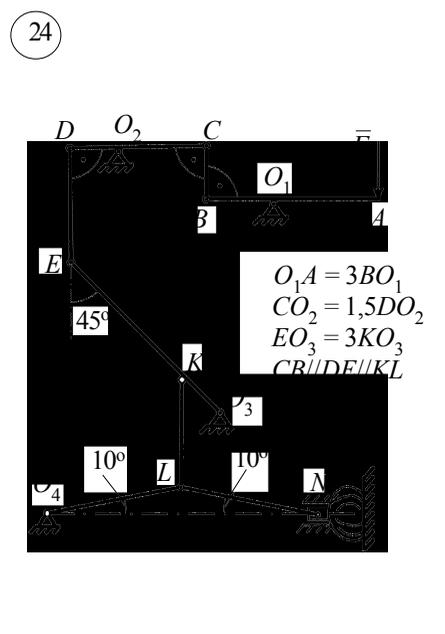
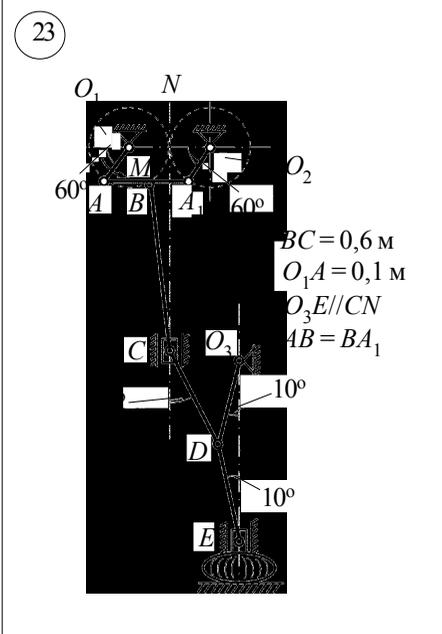
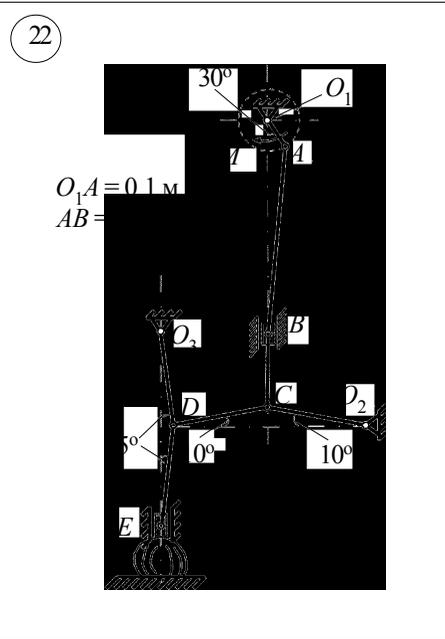
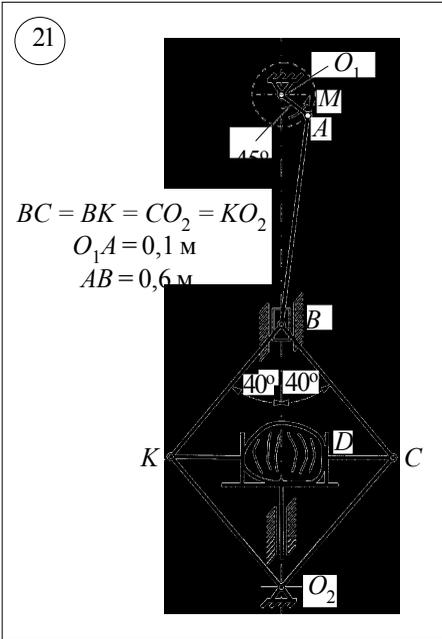


Рис. 2.1.1 (продовження)

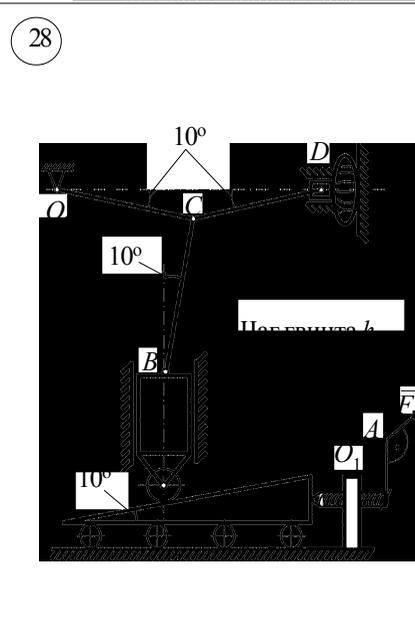
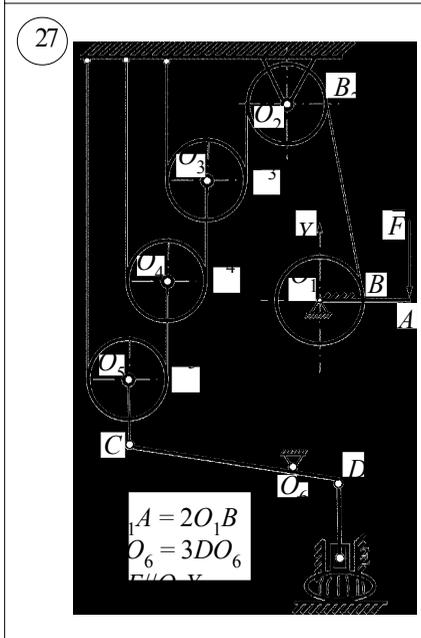
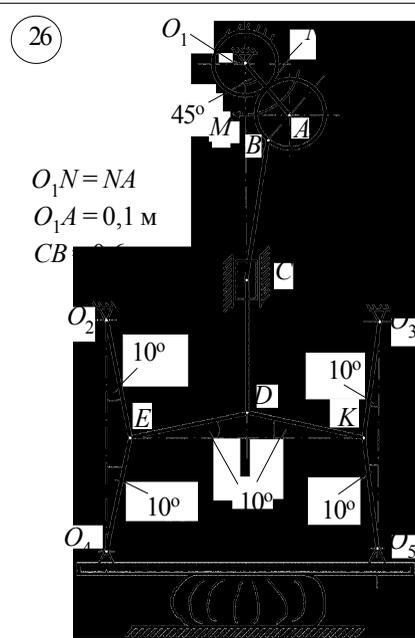
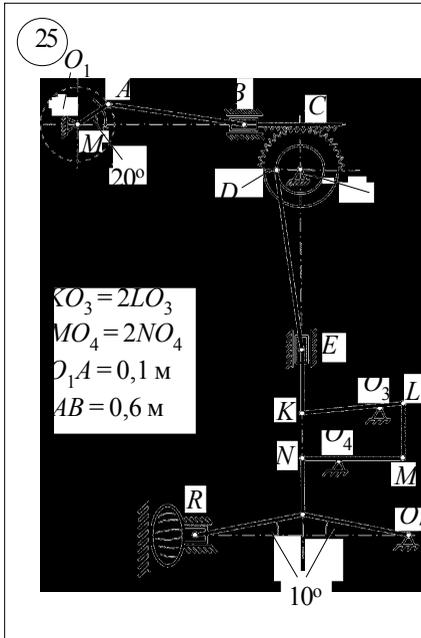


Рис. 2.1.1 (продовження)

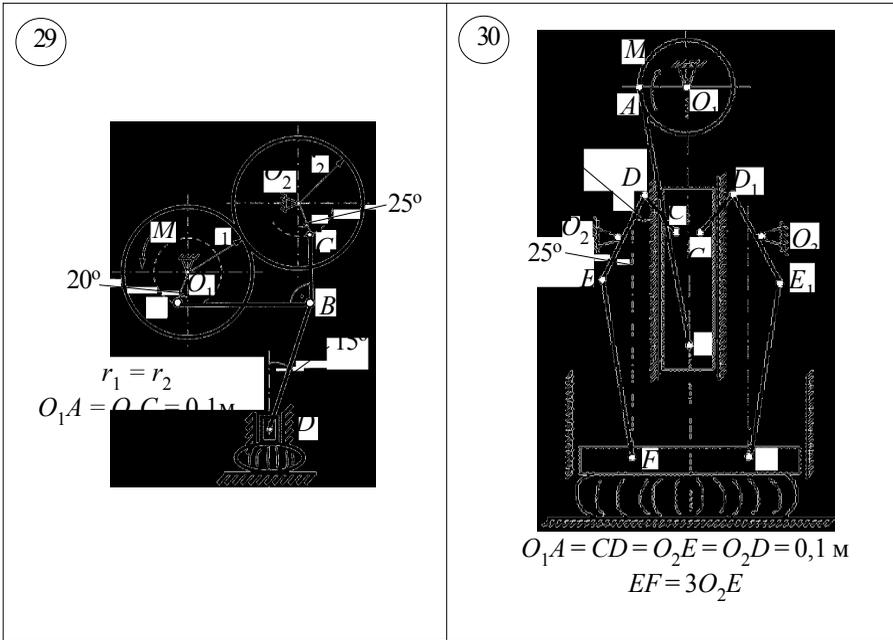


Рис. 2.1.1 (продовження)

Визначити силу  $Q$ , що розвивається пресом, якщо він у заданому положенні знаходиться в стані рівноваги.

Вагою ланок механізму знехтувати.

### Приклад виконання завдання

На рис. 2.1.2,*a* показана кінематична схема преса СМ-301. До кривошипа  $O_1A$  механізму преса прикладений обертальний момент  $M$ , що приводить його в рух. При цьому сила  $Q$ , яка розвивається пресом, через повзун  $E$  передається на стискуване тіло  $H$ .

Для заданого положення механізму при його рівновазі визначити силу  $Q$ , яку розвиває прес.

Вагою ланок механізму і тертям знехтувати.

*Розв'язок*

Механізм преса СМ-301 у заданому положенні знаходиться під дією системи сил – моменту  $M$  і реакції  $N$  тіла  $H$ .

Механізм преса можна розглядати як механічну систему з ідеаль-

ними в'язями, тому для визначення невідомої реакції  $N$  (приєднуючи її до активних сил) можна застосувати принцип можливих переміщень.

Надамо кривошипу  $O_1A$  можливе переміщення  $\delta\varphi$ . Внаслідок цього повзун  $E$  одержить можливе переміщення  $\delta S_E$  (рис. 2.1.2, б). Тоді рівняння елементарних робіт має вигляд

$$M \delta\varphi - N \delta S_E = 0. \quad (1)$$

З виразу (1)

$$N = M \frac{\delta\varphi}{\delta S_E}. \quad (2)$$

Оскільки даний механізм має один степінь вільності, переміщення  $\delta S_E$  можна виразити через переміщення  $\delta\varphi$ .

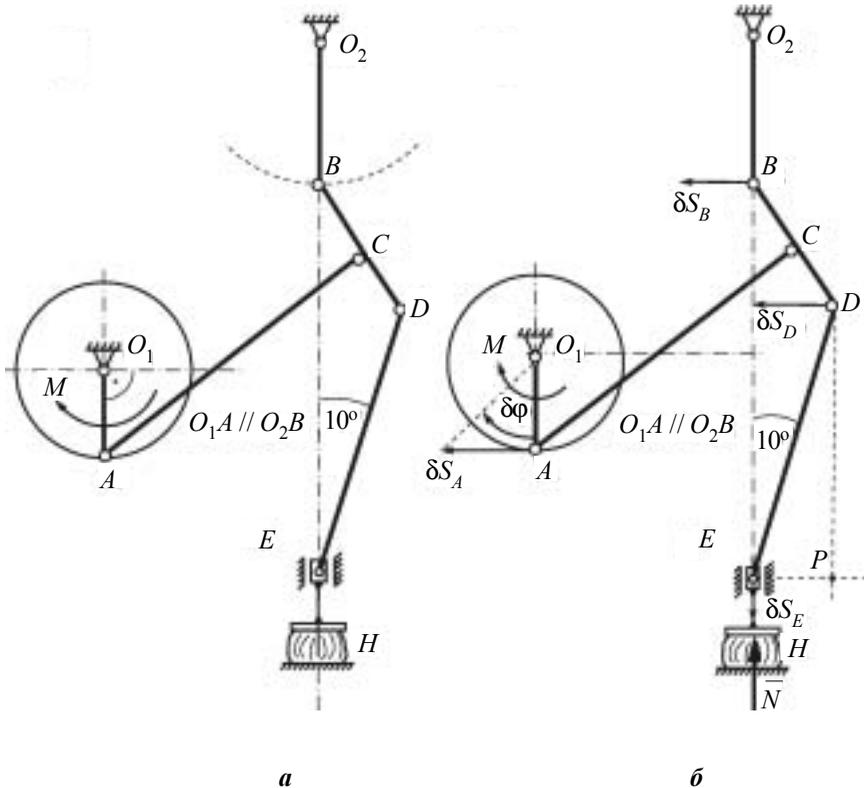


Рис. 2.1.2

У заданому положенні механізму  $O_1A||O_2B$ . Тому миттєвий центр обертання (МЦО) ланки  $ABC$  знаходиться в нескінченності. Отже,

$$\delta S_A = \delta S_B = \delta S_D = O_1A \delta \varphi, \quad (3)$$

де  $\delta S_A$ ,  $\delta S_B$ ,  $\delta S_D$  – відповідно переміщення точок  $A$ ,  $B$  і  $D$  механізму.

Для ланки  $DE$  МЦО знаходиться в точці  $P$ . Тому  $\frac{\delta S_E}{\delta S_D} = \frac{PE}{PD}$ , але

$$\frac{PE}{PD} = \operatorname{tg} 10^\circ. \text{ Тоді}$$

$$\frac{\delta S_E}{\delta S_D} = \operatorname{tg} 10^\circ. \quad (4)$$

З виразів (3) і (4),

$$\frac{\delta \varphi}{\delta S_E} = \frac{1}{O_1A \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) у вираз (2), маємо

$$N = \frac{M}{O_1A \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

Тоді зусилля  $Q$ , що розвивається пресом при даному його положенні, буде

$$Q = \frac{M}{O_1A \cdot \operatorname{tg} 10^\circ}.$$

## Задача 2.2. Дослідження руху механічної системи

До ведучого колеса або барабана  $I$  радіусом  $r_1$  підйомного механізму прикладено сталий обертальний момент  $M$ . Вважаючи колеса, блоки, барабани та катки однорідними суцільними циліндрами, визначити прискорення  $a_B$  центра тяжіння вантажу  $B$ , сили натягу тросу на всіх ділянках та колові зусилля, що виникають в точках дотику колес.

При ковзанні вантажу  $B$  коефіцієнт тертя ковзання  $f$ , при коченні катка коефіцієнт тертя кочення  $k$ . Масою троса та силами опору в підшипниках знехтувати.

Варіанти схем механізмів зображені на рис. 2.2.1, а необхідні дані наведені в табл. 2.1, де  $P_1, P_2, \dots, P_6$  – відповідно вага елементів системи тіл 1, 2, ..., 6.

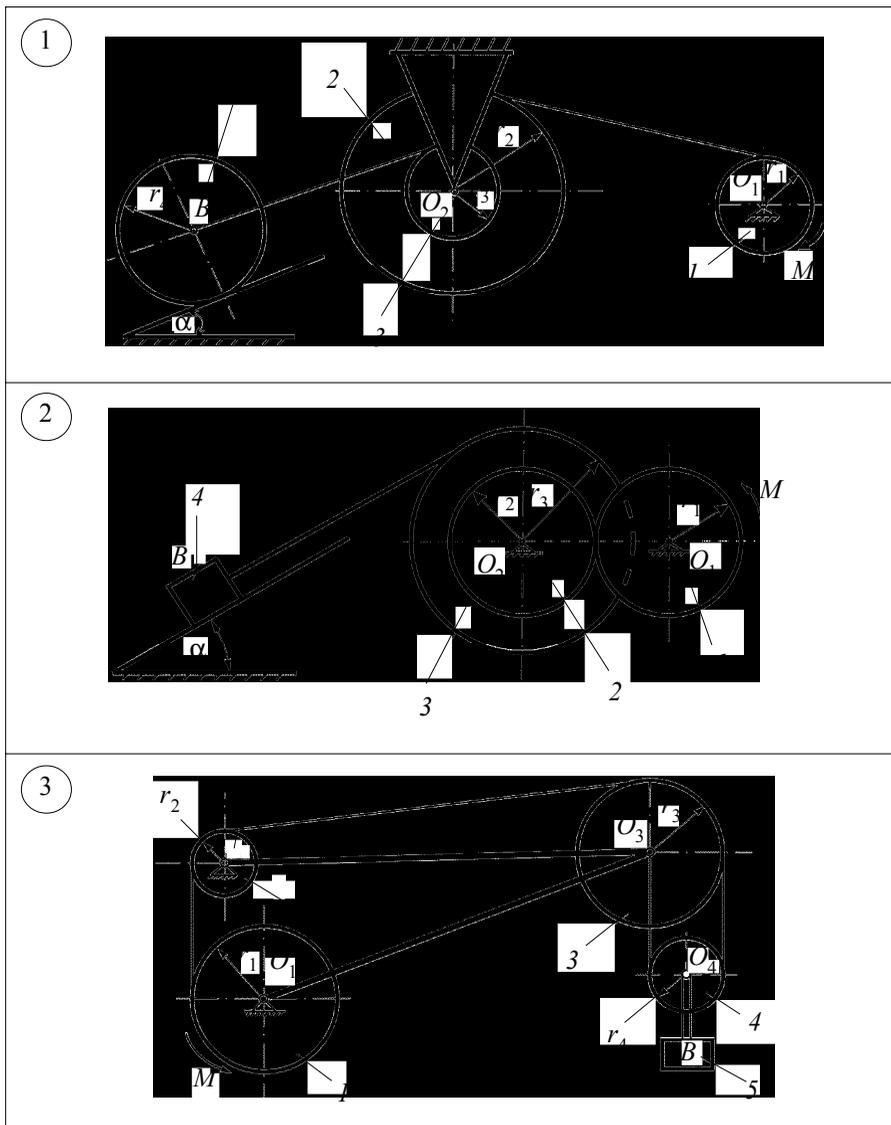


Рис. 2.2.1

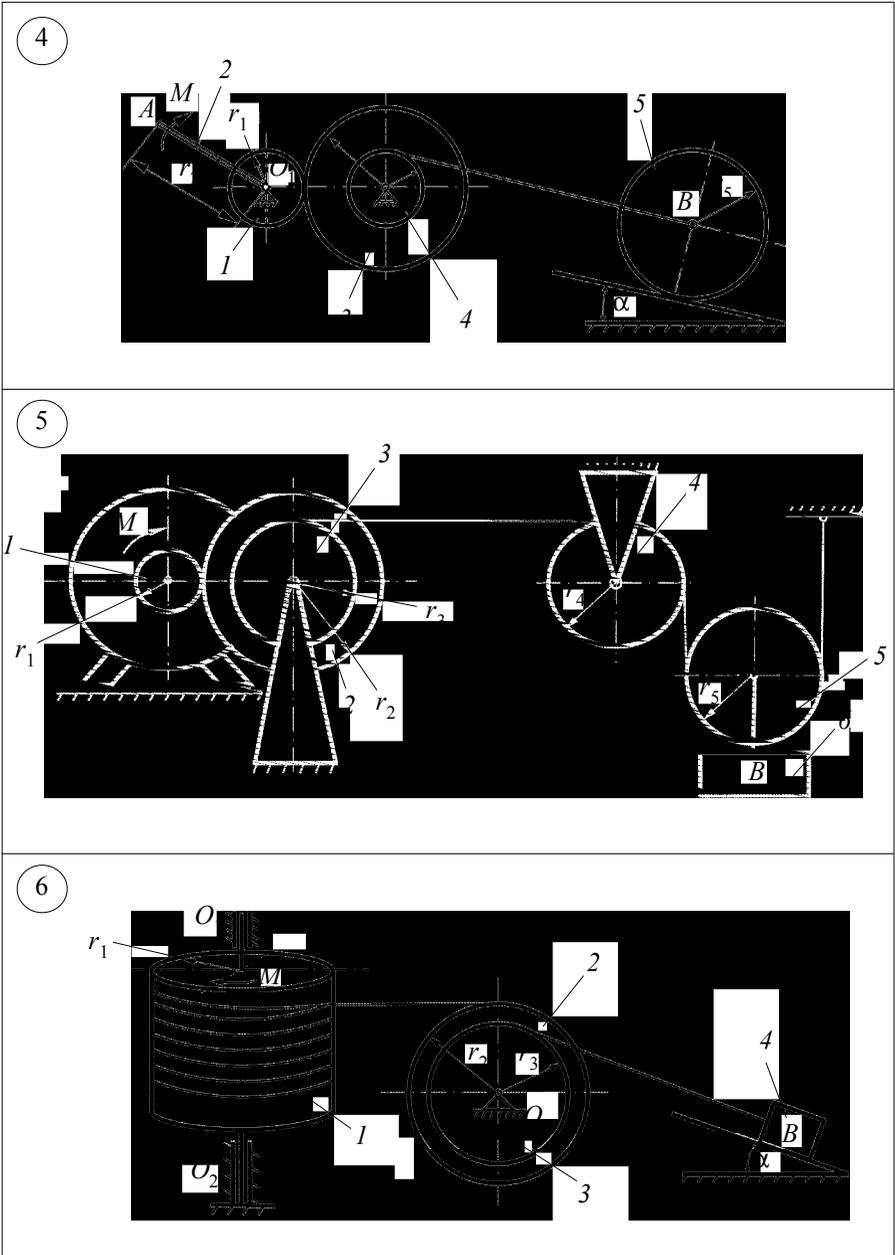


Рис. 2.2.1 (продовження)

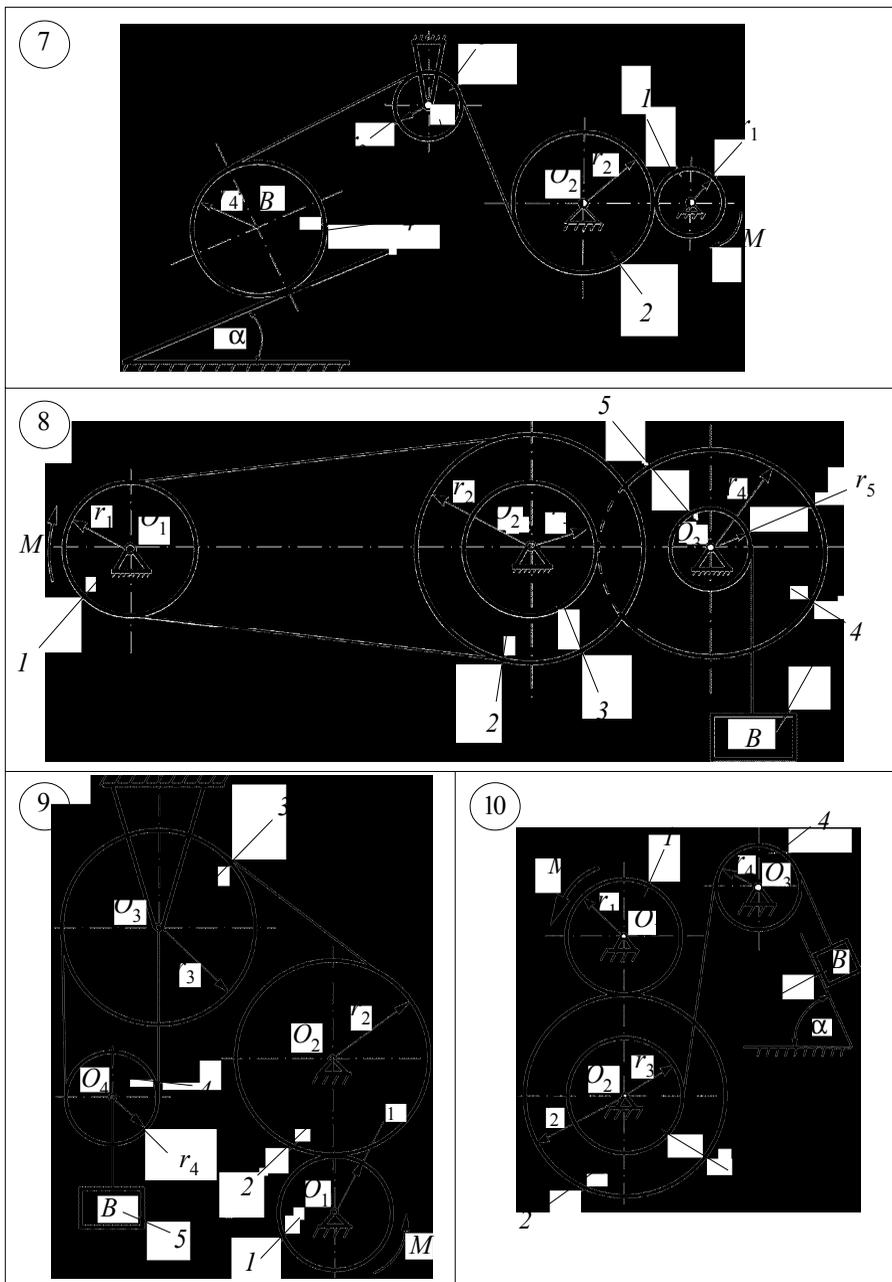


Рис. 2.2.1 (продовження)

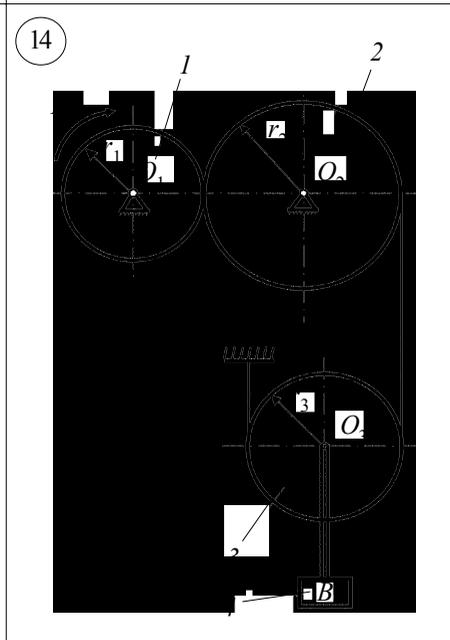
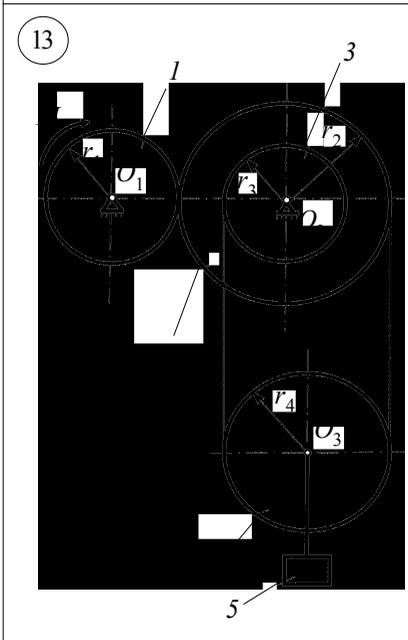
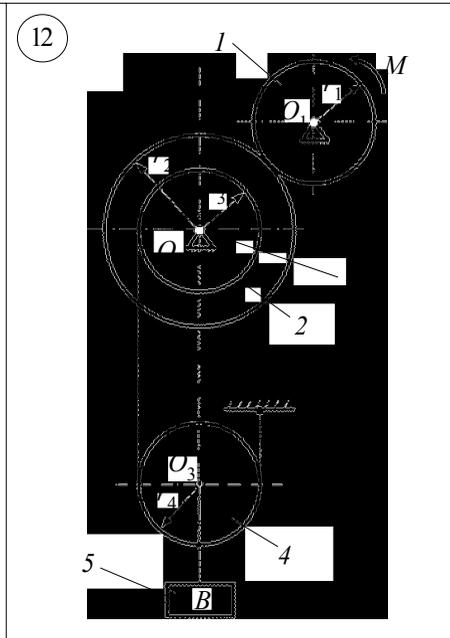
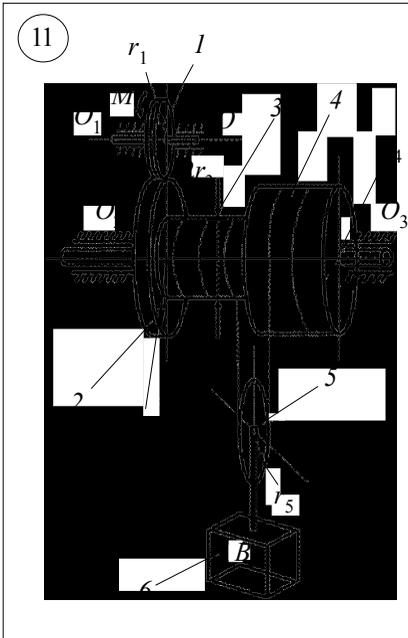


Рис. 2.2.1 (продовження)

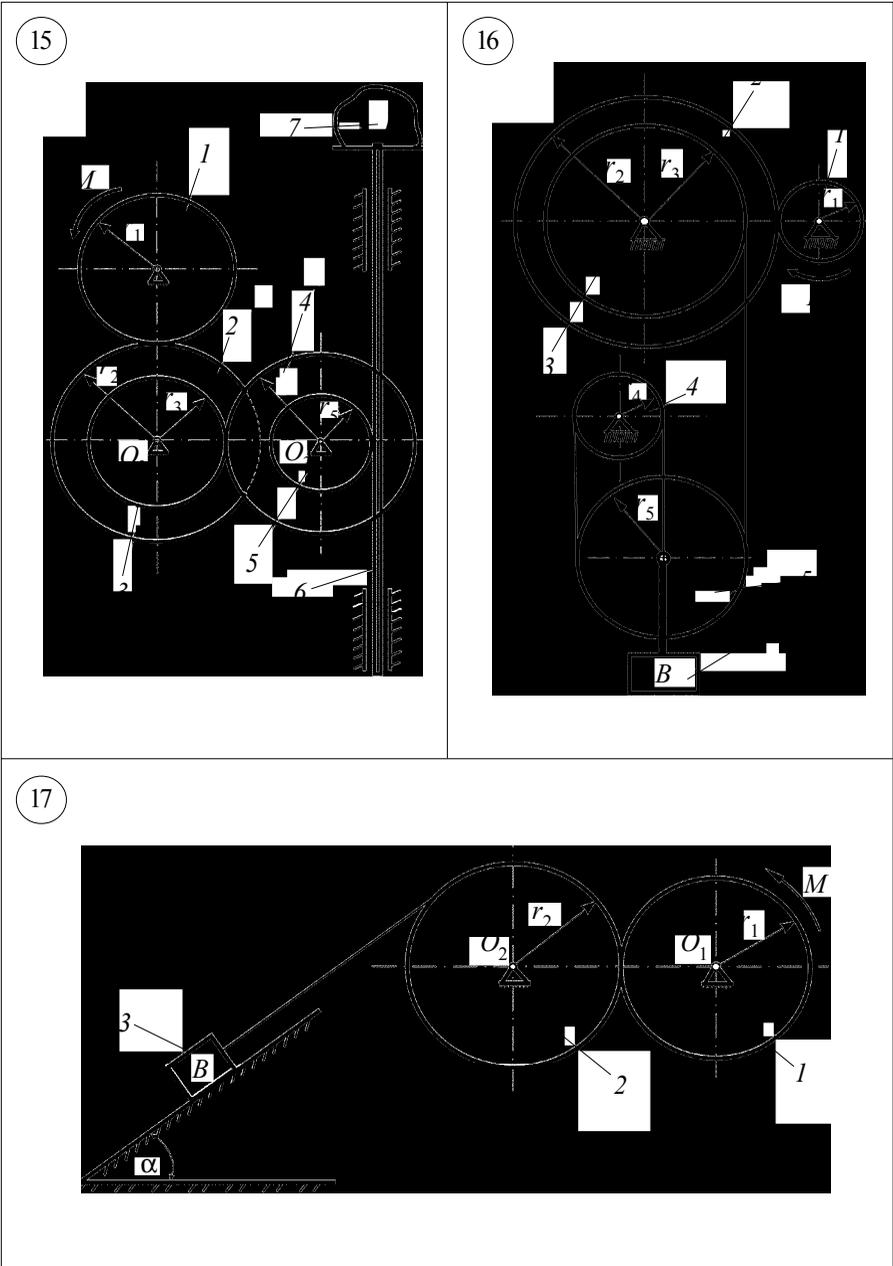
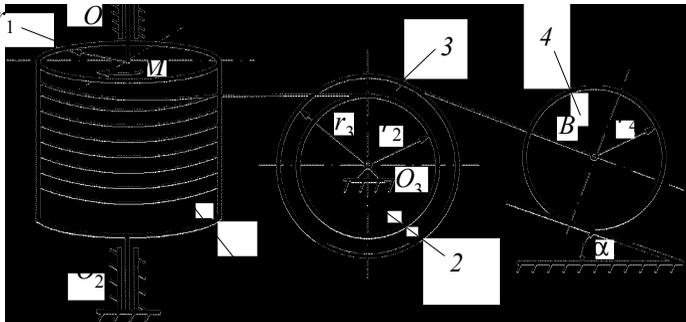
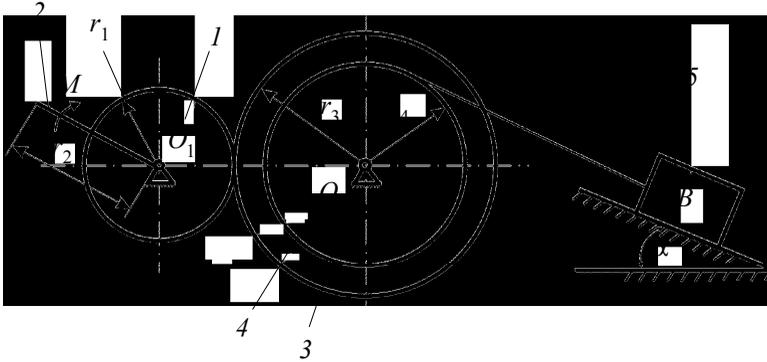


Рис. 2.2.1 (продовження)

18



19



20

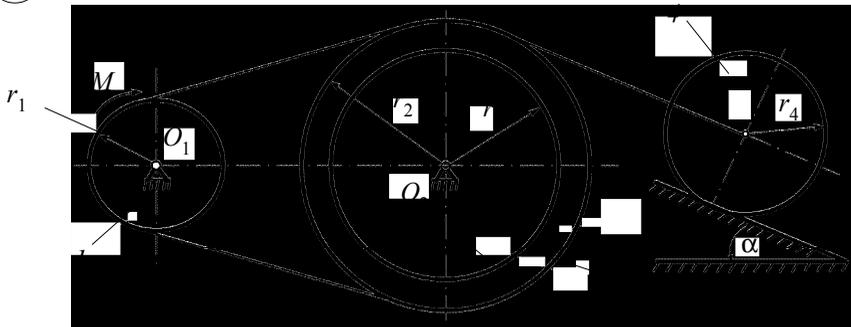


Рис. 2.2.1 (продовження)

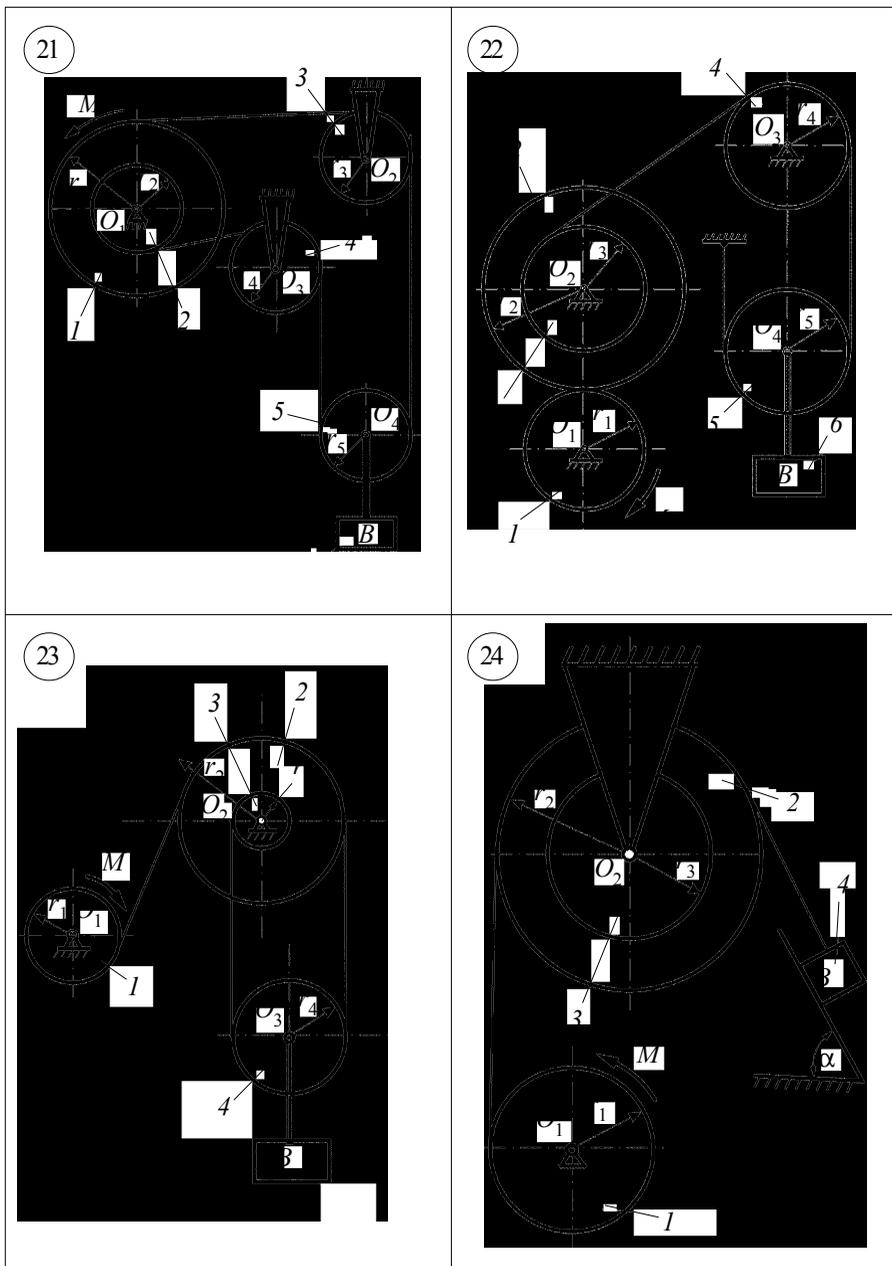


Рис. 2.2.1 (продовження)

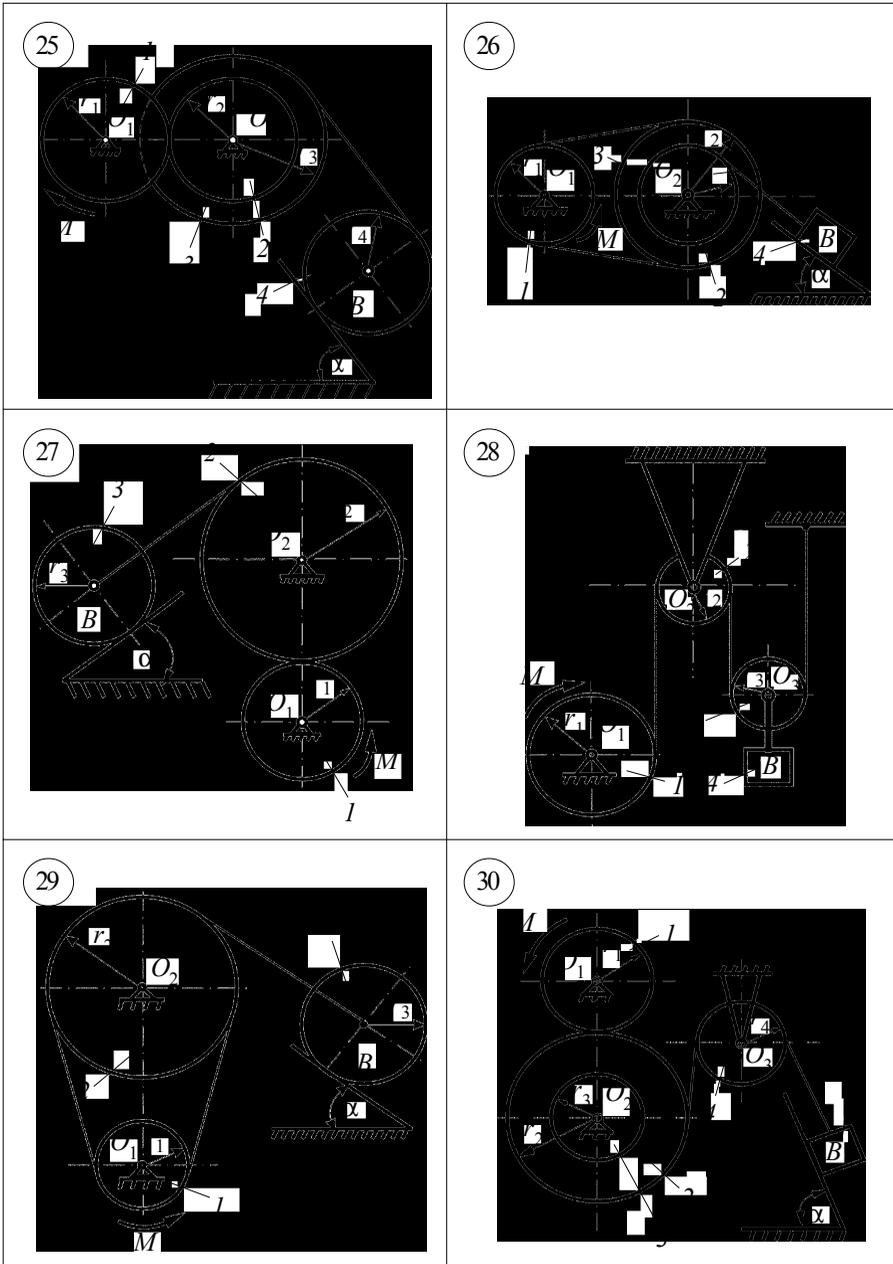


Рис. 2.2.1 (продовження)

Таблиця 2.1

Варіант	$\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{r_3}{r_1}$	$\frac{r_4}{r_1}$	$\frac{r_5}{r_1}$	$\frac{P_1}{P}$	$\frac{P_2}{P}$	$\frac{P_3}{P}$	$\frac{P_4}{P}$	$\frac{P_5}{P}$	$\frac{P_6}{P}$	$\frac{M}{Pr_1}$	$\alpha$ , град	$f$	$\frac{k}{r_1}$
1	2	1	1,5	–	1	4	1	20	–	–	20	30	–	0,01
2	1	1,5	–	–	1	1	4	10	–	–	20	30	0,19	–
3	0,5	1	0,5	–	4	1	3	1	25	–	25	–	–	–
4	3	2	1	1,5	3	1	9	3	25	–	15	45	–	0,02
5	2	1,5	1	1,5	1	4	3	1	2	20	10	–	–	–
6	1,5	1	–	–	10	5	3	50	–	–	30	30	0,25	–
7	2,5	1	2,5	–	1	6	1	20	–	–	15	60	–	0,02
8	1,5	1	1,5	2/3	1	3	1	3	1	30	20	–	–	–
9	2	2	1	–	1	4	4	1	50	–	45	–	–	–
10	2	1	1	–	1	5	1	1	30	–	29	60	0,2	–
11	2	1	2	1	1	4	5	8	1	50	25	–	–	–
12	2	1	1	–	1	5	2	1	25	–	13	–	–	–
13	2	1	1,5	–	1	6	3	2	30	–	12	–	–	–
14	1,5	2/3	–	–	2	5	1	29	–	–	30	–	–	–
15	2	1	2,5	1	1	4	1	7	2	42	15	–	–	–
16	2	1,5	1	2	1	4	4	1	1	40	15	–	–	–
17	1,5	–	–	–	1	5	35	–	–	–	32	30	0,15	–
18	1	1,5	1	–	10	2	4	60	–	–	100	30	–	0,01
19	3	2	1,5	–	1	2	4	4	40	–	40	45	0,2	–
20	2,5	2	1,5	–	1	7	5	30	–	–	35	45	–	0,01
21	0,5	0,5	0,5	0,5	4	1	1	1	1	60	20	–	–	–
22	2	1	1	1	1	5	3	1	1	50	25	–	–	–
23	2	1	1,5	–	1	6	3	2	40	–	15	–	–	–
24	1,5	1	–	–	1	4	1	35	–	–	25	45	0,01	–
25	1	1,5	1	–	1	1	6	20	–	–	35	30	–	0,02
26	1,5	1	–	–	1	3	2	16	–	–	15	60	0,2	–
27	1,5	1	–	–	1	6	50	–	–	–	50	45	–	0,01
28	0,5	0,5	–	–	3	1	1	20	–	–	15	–	–	–
29	2	1,5	–	–	1	6	30	–	–	–	40	60	–	0,01
30	1,5	0,5	0,5	–	2	5	2	1	20	–	8	60	0,1	–



суцільними циліндрами, визначити прискорення  $a_B$  центра тяжіння катка, який піднімається по похилій площині, натяг троса і окружне зусилля, що виникає в точці дотику колеса 1 і зубчатого вінця барабана 2, якщо  $P_1 = P$ ,  $P_2 = 6P$ ,  $P_3 = P$ ,  $P_4 = 10P$ ,  $P_5 = 20P$ ,  $M = 26Pr_1$ ,  $r_2 = \frac{5}{2}r_1$ ,  $r_3 = r_1$ ,  $r_4 = \frac{3}{2}r_1$ ,  $r_5 = \frac{5}{2}r_1$ ,  $\alpha = 60^\circ$  і коефіцієнт тертя кочення катка  $k = 0,02r_1$ .

Масою троса і силами тертя в підшипниках знехтувати. Вважати, що трос по блоку не проковзує, каток по похилій площині котиться без ковзання.

### Розв'язок

1. Для визначення прискорення центру тяжіння катка застосуємо загальне рівняння динаміки.

Покажемо активні сили і моменти сил, що діють на дану механічну систему. До них відносяться: рушійний момент  $M$ , прикладений до колеса 1, сили тяжіння:  $\bar{P}_1$  – колеса 1,  $\bar{P}_2$  – барабана 2,  $\bar{P}_3$  – колеса 3,  $\bar{P}_B = \bar{P}_4 + \bar{P}_5$  – барабана 4 та катка 5 (як єдиного твердого тіла – див. рис. 2.2.2).

Будемо вважати, що напрям руху системи зі стану спокою визначається напрямом обертального моменту  $M$ .

Похила площина, по якій котиться каток, не є ідеальною в'яззю. Тому до активних сил приєднаємо силу тертя зчеплення  $\bar{F}$  катка з похилою площиною, спрямовану вздовж цієї площини. Конкретний напрям сили  $\bar{F}$  залежить від величини прискорення  $\bar{a}_B$ . Оскільки є тертя кочення, то нормальна реакція  $N = (P_4 + P_5) \cos \alpha$  похилої площини зміщена в напрямку руху катка на відстань  $k$  (див. рис. 2.2.2).

Розкладемо  $\bar{P}_B$  на складові:  $P' = P_B \sin \alpha$  – паралельну похилій площині і  $P'' = N \cos \alpha$  – перпендикулярну до похилої площини. Легко бачити, що  $\bar{P}''$  та  $N$  утворюють пару з моментом  $M_k = N \cdot k = (P_4 + P_5) \cdot k \cdot \cos \alpha$ , який є моментом тертя кочення катка 5 і направлений протилежно до напрямку його обертання. В зв'язку з цим необхідно точно знати дійсний напрям руху системи.

Реакції підшипників у точках  $O_1, O_2, O_3$  на рис. 2.2.2 не показані, оскільки вони є реакціями ідеальних в'язів і не входять у загальне рівняння динаміки.

Прикладемо сили інерції. Сили інерції частин механізму, що обертаються навколо нерухомих осей, зводяться до пар сил з моментами  $M^{\Phi}_1$ ,

$M_2^\Phi, M_3^\Phi$ , направлених протилежно до кутових прискорень відповідних ланок. Каток 5 з барабаном 4, як єдине тверде тіло, здійснює плоский рух. Тому його сили інерції зводяться до сили, що дорівнює головному вектору  $\bar{\Phi}_B$ , і пари сил, момент якої дорівнює головному моменту  $M_B^\Phi$ .

Сила інерції  $\bar{\Phi}_B$  прикладена в центрі тяжіння  $B$  катка та барабана і направлена протилежно до прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$ , а момент  $M_B^\Phi$  направлений протилежно до кутового прискорення  $\epsilon_B$  катка.

Надамо колесу 1 можливе кутове переміщення  $\delta\varphi_1$ . Якщо після розв'язання задачі шукане прискорення буде від'ємним, то це означає, що система рухається в напрямку, протилежному обраному, або знаходиться в рівновазі. В даному випадку дійсний напрям руху системи показано на рис. 2.2.2. Тоді барабан 2, блок 3 і каток 5 отримують можливе кутове переміщення відповідно  $\delta\varphi_2, \delta\varphi_3, \delta\varphi_5$ , а точка  $B$  – переміщення  $\delta\bar{S}_B$ .

Складемо загальне рівняння динаміки:

$$M\delta\varphi_1 - M_1^\Phi\delta\varphi_1 - M_2^\Phi\delta\varphi_2 - M_3^\Phi\delta\varphi_3 - M_B^\Phi\delta\varphi_5 - \Phi_B\delta S_B - Nk\delta\varphi_5 - (P_4 - P_5)\sin\alpha \cdot \delta S_B = 0. \quad (1)$$

Роботи сил тяжіння  $P_1, P_2, P_3$  дорівнюють нулю, оскільки точки їх прикладення нерухомі. Робота сили тертя  $F$  також дорівнює нулю, тому що її точка прикладення  $D$  співпадає з миттєвим центром швидкостей катка 5.

Момент пари сил інерції колеса 1, що обертається з кутовим прискоренням  $\epsilon_1$ ,

$$M_1^\Phi = I_{0_1}\epsilon_1,$$

де  $I_{0_1}$  – момент інерції колеса 1 відносно осі, що проходить через вісь  $O_1$  перпендикулярно до площини колеса,

$$I_{0_1} = \frac{P_1 r_1^2}{2g}.$$

Тоді

$$M_1^\Phi = \frac{P_1 r_1^2}{2g}\epsilon_1. \quad (2)$$

Аналогічно визначаються моменти пар сил інерції інших ланок механізму:

$$M_2^\Phi = \frac{P_2 r_2^2}{2g} \varepsilon_2; \quad (3) \quad M_3^\Phi = \frac{P_3 r_3^2}{2g} \varepsilon_3; \quad (4) \quad M_B^\Phi = \frac{P_4 r_4^2 + P_5 r_5^2}{2g} \varepsilon_5. \quad (5)$$

Тут  $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5$  – кутові прискорення відповідно барабана 2, блоку 3 і катка 5.

Головний вектор сил інерції

$$\Phi_B = \frac{P_4 + P_5}{g} a_B. \quad (6)$$

Враховуючи вирази (2)–(6), рівняння (1) перепишемо так:

$$M \delta \varphi_1 - \frac{P_1 r_1^2}{2g} \varepsilon_1 \delta \varphi_1 - \frac{P_2 r_2^2}{2g} \varepsilon_2 \delta \varphi_2 - \frac{P_3 r_3^2}{2g} \varepsilon_3 \delta \varphi_3 - \frac{\varepsilon_5}{2g} (P_4 r_4^2 + P_5 r_5^2) \delta \varphi_5 - \\ - \frac{a_B}{g} (P_4 + P_5) \delta S_B - k(P_4 + P_5) \cos \alpha \cdot \delta \varphi_5 - (P_4 + P_5) \sin \alpha \cdot \delta S_B = 0. \quad (7)$$

Система має один степінь свободи, тому всі можливі переміщення, що входять у рівняння (7), можна виразити через можливе переміщення  $\delta \varphi_1$ :

$$\delta \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \delta \varphi_1; \quad (8) \quad \delta \varphi_3 = \frac{r_1}{r_2} \delta \varphi_1. \quad (9)$$

Оскільки для катка 5 точка  $D$  є миттєвим центром обертання, то  $\delta \varphi_5 = \frac{\delta S}{r_4 + r_5}$ . Але  $\delta S = r_1 \delta \varphi_1$ ; отже,

$$\delta \varphi_5 = \frac{r_1}{r_4 + r_5} \delta \varphi_1; \quad (10)$$

$$\delta S_B = r_5 \delta \varphi_5 = \frac{r_1 r_5}{r_4 + r_5} \delta \varphi_1. \quad (11)$$

Залежність між прискореннями, що входять у рівняння (7), аналогічна залежностям (8)–(11):

$$\varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_1; \quad (12) \quad \varepsilon_3 = \frac{r_1}{r_3} \varepsilon_1; \quad (13)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{r_1}{r_4 + r_5} \varepsilon_1; \quad (14) \quad a_B = \frac{r_1 r_5}{r_4 + r_5} \varepsilon_1. \quad (15)$$

Підставивши вирази (8)–(15) у рівняння (7) і розділивши всі його члени на  $\delta\varphi_1$ , отримаємо

$$M - \frac{P_1 r_1^2}{2g} \varepsilon_1 - \frac{P_2 r_1^2}{2g} \varepsilon_1 - \frac{P_3 r_1^2}{2g} \varepsilon_1 - \frac{(P_4 r_4^2 + P_5 r_5^2)}{2g} \times \frac{r_1^2}{(r_4 + r_5)^2} \varepsilon_1 - \\ - \frac{P_4 + P_5}{g} \frac{r_1^2 r_5^2}{(r_4 + r_5)^2} \varepsilon_1 - \frac{k(P_4 + P_5) r_1}{(r_4 + r_5)} \cos \alpha - \frac{(P_4 + P_5) r_1 r_5}{(r_4 + r_5)} \sin \alpha = 0.$$

З останнього виразу маємо

$$\varepsilon_1 = \frac{2(r_4 + r_5)[M(r_4 + r_5) - (P_4 + P_5)(k \cos \alpha + r_5 \sin \alpha)r_1]}{r_1^2[(P_1 + P_2 + P_3)(r_4 + r_5)^2 + P_4(r_4^2 + 2r_5^2) + 3P_5 r_5^2]} g.$$

Після числової підстановки

$$\varepsilon_1 = \frac{12g}{25r_1}.$$

Скориставшись виразом (15), знаходимо

$$\alpha_B = 0,3g.$$

2. Для визначення колового зусилля в точці дотику коліс  $I$  і  $2$  застосуємо метод кінестатики.

Виділимо з системи колесо  $I$  (рис. 2.2.3). До нього прикладений обертальний момент  $M$ , сила тяжіння  $\bar{P}_1$ , складові реакції підшипника  $O_1 - Y_{O1}$  і  $Z_{O1}$ , колове зусилля  $\bar{S}_{21}$  і нормальна реакція  $\bar{N}_{21}$  ланки 2.

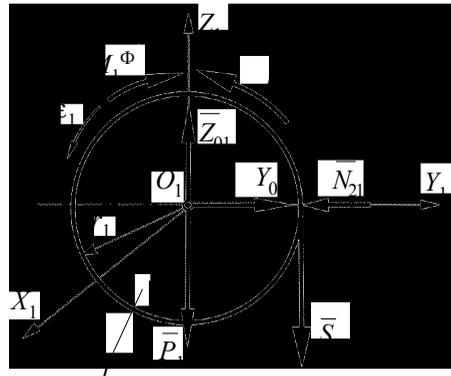


Рис. 2.2.3

Умовно прикладемо до колеса  $I$  пару сил інерції з моментом  $M_1^\Phi$ , спрямувавши момент цієї пари протилежно кутовому прискоренню  $\epsilon_1$ . При цьому отримаємо зрівноважену систему сил.

Запишемо рівняння моментів сил відносно осі  $O_1X_1$ :

$$M - M_1^\Phi - S_{21}r_I = 0.$$

Звідси, використовуючи вираз (2), маємо

$$S_{21} = \frac{M}{r_1} - \frac{P_1 r_1}{2g} \epsilon_1.$$

Після числової підстановки

$$S_{21} = 25,76P.$$

3. Для знаходження натягу троса на ділянці 2–3 (між барабаном 2 і блоком 3) виділимо з системи барабан 2. Уявно розсічемо трос на цій ділянці і замінимо його дію на барабан 2 реакцією  $T_{23}$  (рис. 2.2.4). Крім сили  $\bar{T}_{32}$ , на барабан діють сила тяжіння  $\bar{P}_2$ , реакція підшипника  $O_2$ , складові якої  $Y_{O_2}$  і  $Z_{O_2}$ , колове зусилля  $\bar{S}_{12}$  і нормальна реакція  $\bar{N}_{12}$  ланки  $I$ .

Згідно з законом рівності дії та протидії  $\bar{S}_{21} = -\bar{S}_{12}$ ,  $\bar{N}_{21} = -\bar{N}_{12}$

Умовно приєднавши до цих сил пару сил інерції з моментом  $M_2^\Phi$ , отримаємо зрівноважену систему сил.

Складемо рівняння моментів сил відносно осі  $O_2X_2$ :

$$S_{12}r_2 - T_{32}r - M_2^\Phi = 0.$$

Звідси, використовуючи вирази (3) і (12), будемо мати

$$T_{32}r = S_{12} - \frac{P_2 r_1 \epsilon_1}{2g}.$$

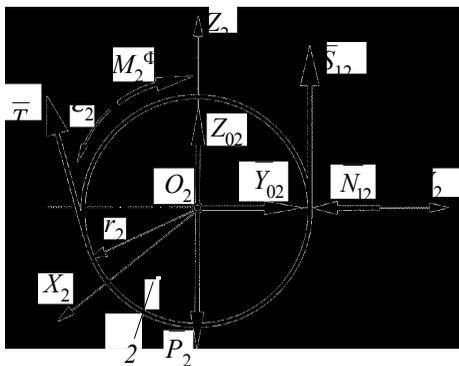


Рис. 2.2.4

Після числової підстановки

$$T_{32} = 24,32P.$$

4. Для знаходження натягу троса на ділянці 3–4 (блок 3 – барабан 4) виділимо з системи блок 3 (рис. 2.2.5).

На блок діють сила тяжіння  $\bar{P}_3$ , реакція підшипника  $O_3$ , складові якої  $Y_{O_3}$  і  $Z_{O_3}$ , реакції троса  $\bar{T}_{43}$  і  $\bar{T}_{23}$ , де  $\bar{T}_{23} = -\bar{T}_{32}$ .

Приєднуючи до цих сил пару сил інерції з моментом  $M_3^\Phi$ , отримаємо зрівноважену систему сил.

Складемо рівняння моментів сил відносно осі  $O_3X_3$ :

$$M_3^\Phi + T_{43}r_3 - T_{23}r_3 = 0.$$

Звідси, використовуючи залежності (4) і (13), будемо мати

$$T_{43} = T_{23} - \frac{P_3 r_1}{2g} \varepsilon_1.$$

Після числової підстановки

$$T_{43} = 23,08P.$$

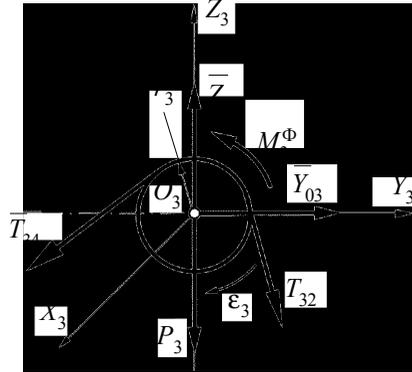


Рис. 2.2.5

### Задача 2.3. Дослідження малих коливань твердого тіла

Тверде тіло, розміри якого показані на рис. 2.3.1, може виконувати малі коливання навколо осі, що проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка. Пружини жорсткістю  $C_1, C_2$  утримують тіло в положенні статичної рівноваги таким чином, що одна з його осей симетрії розташована горизонтально.

Знайти рівняння руху і період малих коливань твердого тіла, якщо воно виведене з положення статичної рівноваги на кут  $\varphi_0$  і йому надана початкова кутова швидкість  $\omega_0$  у напрямку зміщення.

В тих варіантах, де є демпфер, вважати, що сила опору руху пропорційна першій степені швидкості  $v$  поршня демпфера:  $R = \alpha v$ .

Тертям у підшипнику  $O$  і опором повітря знехтувати. Необхідні для розв'язування задачі дані наведені в табл. 2.2, де  $m_1$  і  $m_2$  – маси окремих частин твердого тіла.

#### Приклад виконання завдання

Тверде тіло, що складається зі стержня  $1$  масою  $m_1$  і квадратної пластинки  $2$  масою  $m_2$  з центральним круговим отвором радіусом  $r$ , може виконувати малі коливання відносно вісі, яка проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка (рис. 2.3.2).

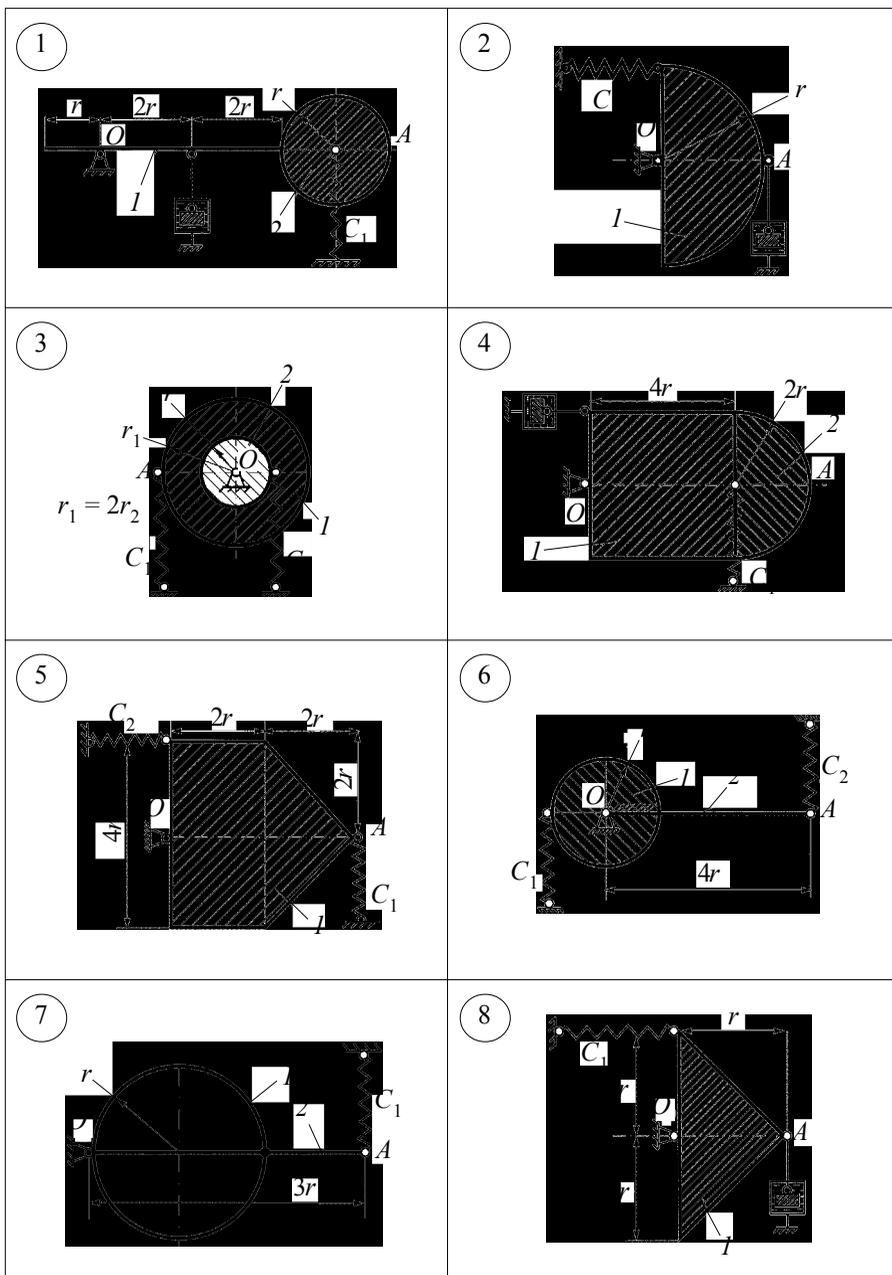


Рис. 2.3.1

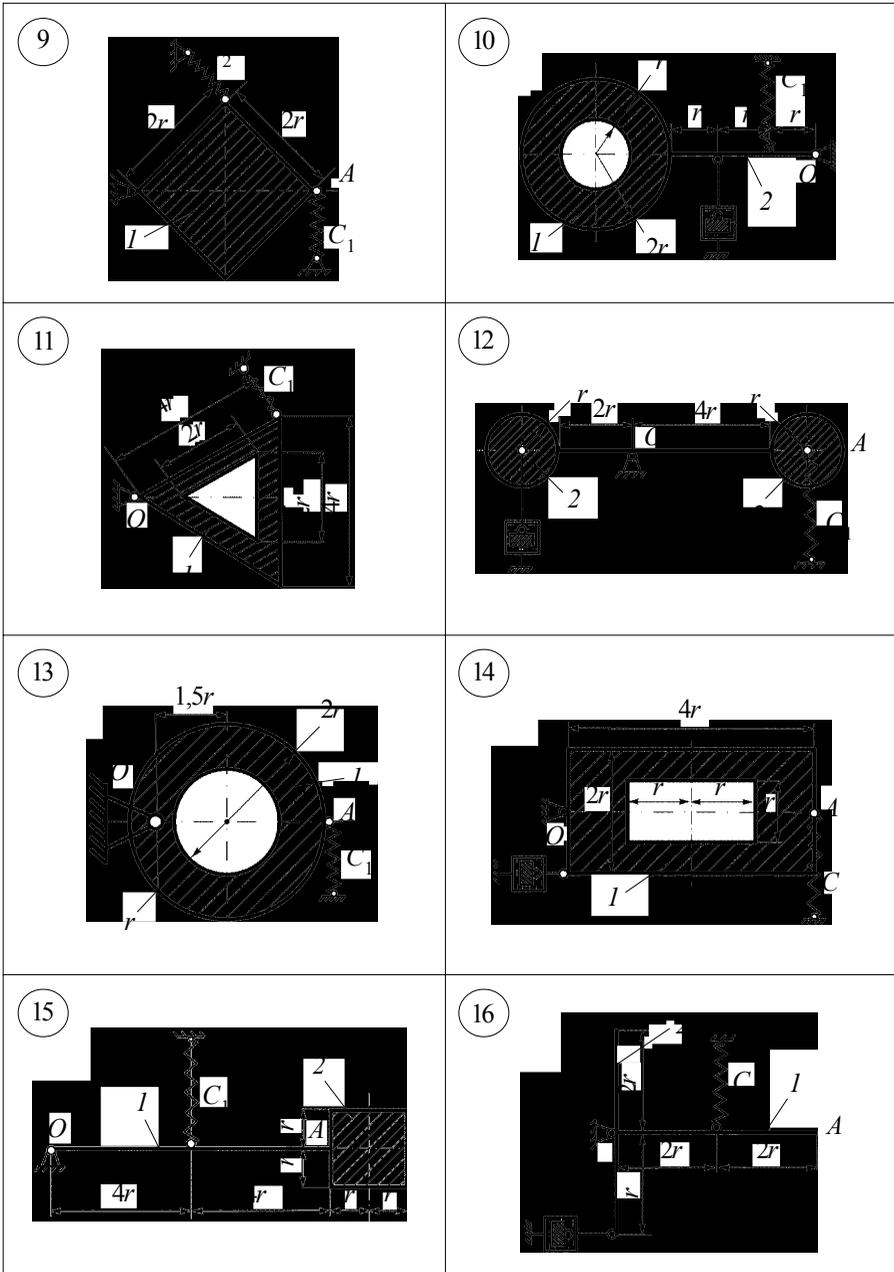


Рис. 2.3.1 (продовження)

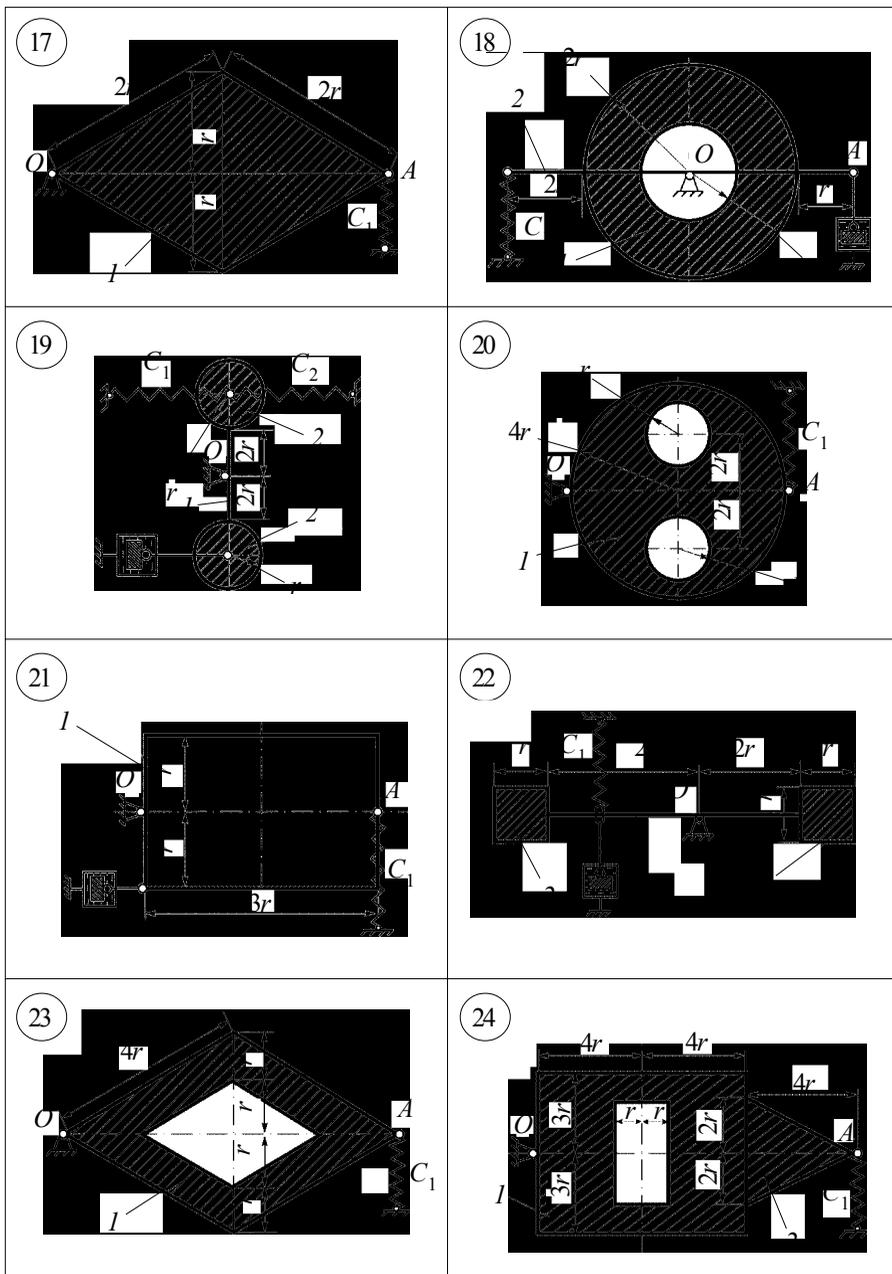


Рис. 2.3.1 (продовження)

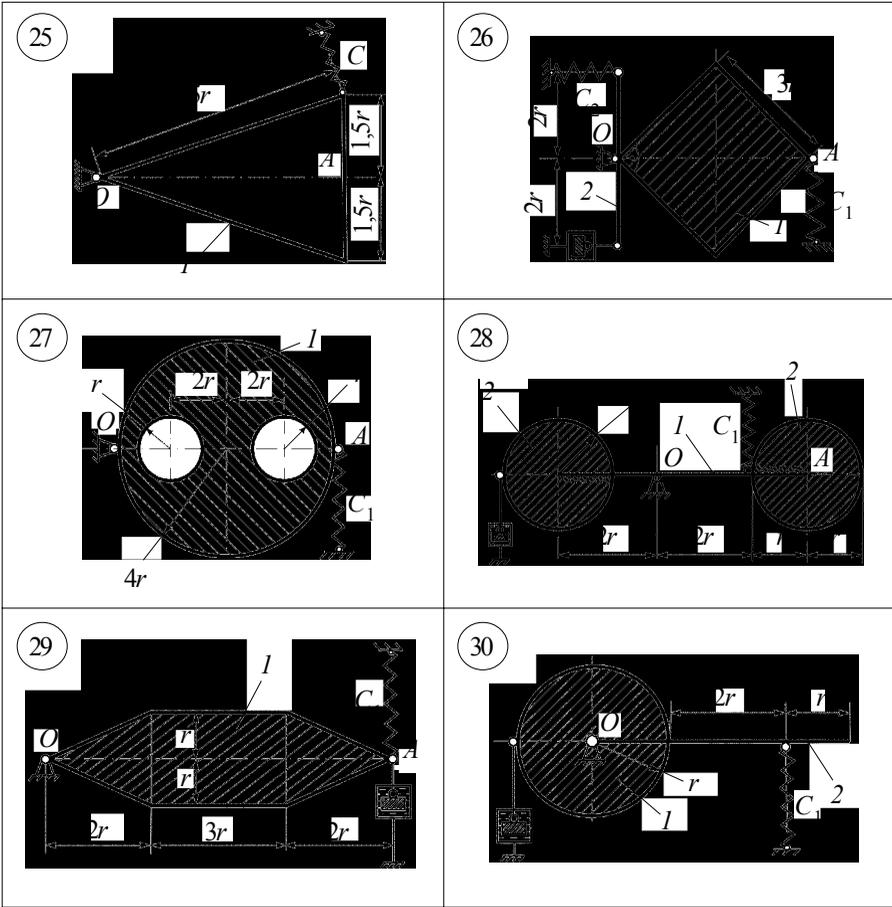


Рис. 2.3.1 (продовження)

Таблиця 2.2

Варіант	$\frac{m_1}{m}$	$\frac{m_2}{m}$	$\frac{c_1}{m}$	$\frac{c_2}{m}$	$\frac{\alpha}{m}, \text{c}^{-1}$	$\varphi_0$	$\omega_0, \text{c}^{-1}$
			$\text{c}^{-2}$				
1	6	4	102,4	–	128	0	$\omega_0$
2	8	–	40	–	8	0	$\omega_0$
3	16	4	30	16	–	$\varphi_0$	0
4	15	10	174	–	348	$\varphi_0$	0
5	18	–	10	40	–	0	$\omega_0$

Продовж. табл. 2.2

Варіант	$\frac{m_1}{m}$	$\frac{m_2}{m}$	$\frac{c_1}{m}$	$\frac{c_2}{m}$	$\frac{\alpha}{m}, c^{-1}$	$\varphi_0$	$\omega_0, c^{-1}$
			$c^{-2}$				
6	8	3	20	30	–	$\varphi_0$	0
7	6	6	30	–	–	0	$\omega_0$
8	30	–	1250	–	100	0	$\omega_0$
9	9	–	30	36	–	0	$\omega_0$
10	6	5	1440	–	180	$\varphi_0$	0
11	45	–	315	–	–	0	$\omega_0$
12	5	3	226,25	–	125	0	$\omega_0$
13	1	–	19	–	–	$\varphi_0$	0
14	1	–	73	–	73	0	$\omega_0$
15	6	6	618	–	–	0	$\omega_0$
16	12	12	200	–	40	0	$\omega_0$
17	1	–	11	–	–	$\varphi_0$	0
18	8	3	33	–	22	0	$\omega_0$
19	3	4	400	400	160	0	$\omega_0$
20	14	–	343	–	–	$\varphi_0$	0
21	3	–	26	–	78	0	$\omega_0$
22	3	6	60	–	60	$\varphi_0$	0
23	4	–	23	–	–	$\varphi_0$	0
24	2	1	140	–	–	0	$\omega_0$
25	1	–	142	–	–	0	$\omega_0$
26	6	3	20	10	20	0	$\omega_0$
27	14	–	343	–	–	$\varphi_0$	0
28	3	4	157,5	–	42	0	$\omega_0$
29	15	–	448	–	64	0	$\omega_0$
30	8	3	20	–	40	0	$\omega_0$

Пружина жорсткістю  $S$  утримує тіло в положенні статичної рівноваги таким чином, що вісь симетрії  $OA$  розміщена горизонтально. Знайти рівняння руху і період малих коливань твердого тіла, якщо воно виведене з положення статичної рівноваги на кут  $\varphi_0$  і йому надана початкова кутова швидкість  $\omega_0$  в тому ж напрямку. Демпферний пристрій створює силу опору, пропорційну першій степені швидкості  $v$  поршня демфера і рівну  $R = \alpha v$ . Тертям в підшипнику  $O$  і опором повітря знехтувати.

В обчисленнях взяти:  $\frac{m_1}{m} = 1$ ;  $\frac{m_2}{m} = 5$ ;  $\frac{c}{m} = 353 \text{ с}^{-2}$ ;  $\frac{\alpha}{m} = 166 \text{ с}^{-1}$ .

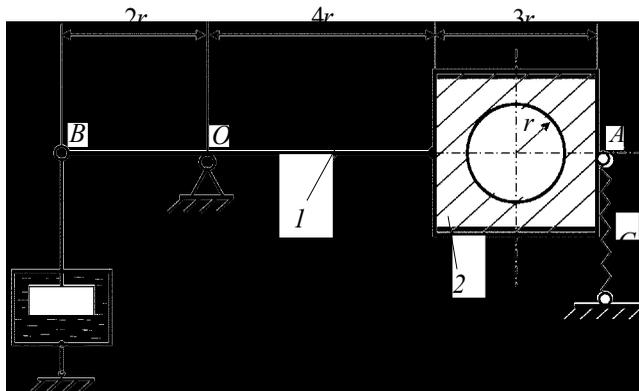


Рис. 2.3.2

### Розв'язок

Розглянемо проміжне положення твердого тіла, яке характеризується кутом  $\varphi$ . На рис. 2.3.3 показано напрям відліку кута  $\varphi$ , зображені діючі активні сили:  $P_1$  – вага стержня  $I$ ;  $P_2$  – вага квадратної пластини з круговим отвором;  $F$  – сила пружності пружини,  $R$  – сила опору, яка на-

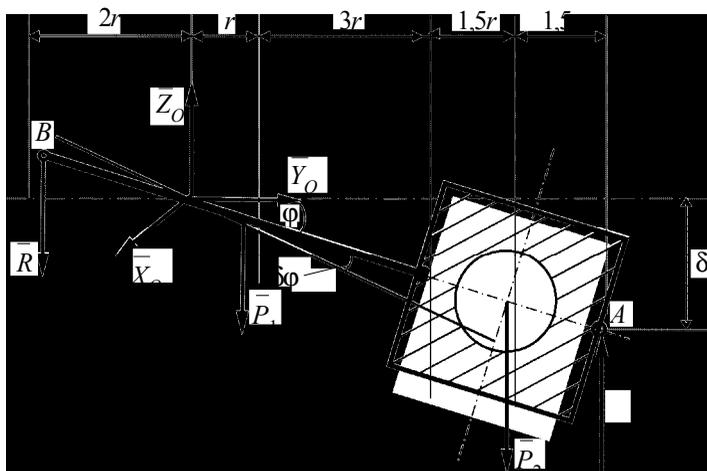


Рис. 2.3.3

правлена протилежно до швидкості поршня;  $Y_0, Z_0$  – складові реакції циліндричного шарніра  $O$ .

Модуль сили пружності пружини знайдемо з виразу

$$F = C(\lambda_{\text{ст}} + \delta),$$

де  $\lambda_{\text{ст}}$  – зміщення пружини при статичній рівновазі тіла;  $\delta$  – зміщення пружини з положення статичної рівноваги.

Спочатку розглянемо статичну рівновагу твердого тіла (рис. 2.3.2). Складемо суму моментів сил відносно осі  $OX$  і отримаємо умову статичної рівноваги:

$$P_1 r + 5,5P_2 r - 7rc\lambda_{\text{ст}} = 0; \quad (2) \quad \delta = 7r \cdot \sin \varphi. \quad (3)$$

Щоб сформулювати рівняння руху системи тіл, використаємо рівняння Лагранжа другого роду. Система має один степінь свободи. За узагальнену координату візьмемо кут  $\varphi$ . Тоді рівняння Лагранжа другого роду буде мати вигляд

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q,$$

де  $T$  – кінетична енергія системи тіл;  $Q$  – узагальнена сила;  $\dot{\varphi}$  – узагальнена швидкість.

Знайдемо кінетичну енергію системи тіл:

$$T = T_1 + T_2,$$

де  $T_1 = \frac{I_1 \dot{\varphi}^2}{2}$  і  $T_2 = \frac{I_2 \dot{\varphi}^2}{2}$  – відповідно кінетична енергія тіл 1 і 2.

Тоді

$$T_1 = \frac{I_x \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (5)$$

де  $I_x = I_1 + I_2$  – момент інерції тіл 1 і 2 відносно осі  $OX$ .

Знайдемо узагальнену силу  $Q$ . Надамо стержню  $l$  можливе переміщення  $\delta\varphi$ . Тоді

$$Q = \frac{\delta A}{\delta \varphi},$$

де  $\delta A$  – сума елементарних робіт сил  $P_1, P_2, F$  і  $R$  на можливому переміщенні  $\delta\varphi$ . Сила опору  $R = \alpha v = 2\alpha r\dot{\varphi}$ ,  $\delta A = (P_1 r \cdot \cos \varphi + 5,5P_2 r \cdot \cos \varphi - F7r \cdot \cos \varphi - R \cdot 2r \cdot \cos \varphi)\delta\varphi$ .

Узагальнена сила

$$Q = [P_1 r + 5,5P_2 r - c(\lambda_{\text{ст}} + \delta)7r - 4r^2\alpha\dot{\varphi}]\cos \varphi;$$

$$Q = ((P_1 r + 5,5P_2 r - 7rc\lambda_{\text{ст}}) - 7rc\delta - 4r^2\alpha\dot{\varphi})\cos \varphi.$$

З урахуванням виразів (2) і (3) маємо

$$Q = -49r^2c \sin \varphi \cos \varphi - 4r^2\alpha\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Підставимо кінетичну енергію (5) і узагальнену силу (6) в рівняння Лагранжа (4):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_x \dot{\varphi}; \quad \frac{dT}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = I_x \ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Маємо

$$I_x \ddot{\varphi} = -49r^2c \cdot \sin \varphi \cos \varphi - 4r^2\alpha\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Звідси диференціальне рівняння буде

$$\ddot{\varphi} + \frac{4r^2\alpha}{I_x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{49r^2c}{I_x} \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) в елементарних функціях не інтегрується, але оскільки розглядаються малі коливання твердого тіла, можна прийняти

$$\sin \varphi \approx \varphi; \quad \cos \varphi \approx 1.$$

Тоді диференціальне рівняння (7) прийме вигляд

$$\ddot{\varphi} + \frac{4r^2\alpha}{I_x} \dot{\varphi} + \frac{49r^2c}{I_x} \varphi = 0. \quad (8)$$

Позначимо:

$$2n = \frac{4r^2\alpha}{I_x}; \quad k^2 = \frac{49r^2c}{I_x}. \quad (9)$$

Маємо

$$\ddot{\phi} + 2n\dot{\phi} + k^2\phi = 0. \quad (10)$$

Обчислимо коефіцієнти диференціального рівняння (10). Для цього необхідно знайти момент інерції системи тіл відносно осі  $OX$ :

$$I_x = I_1 + I_2. \quad (11)$$

Використовуючи дані табл. 1.2, а також теорему Штейнера для  $I_1$ , отримаємо

$$I_1 = \frac{m_1(3r^2)}{3} + m_1r^2 = 4m_1r^2 = 4mr^2. \quad (12)$$

Момент інерції пластини з круговим отвором відносно осі  $OX$  дорівнює різниці моментів інерції суцільної квадратної пластини  $I'_2$  і вирізаного отвору  $I''_2$  відносно тієї ж осі:

$$I_2 = I'_2 - I''_2. \quad (13)$$

Використовуючи дані табл. 1.2 і теорему Штейнера для  $I'_2$  і  $I''_2$  отримаємо

$$I'_2 = \frac{m'_2 [(1,5r)^2 + (1,5r)^2]}{3} + m'_2 (5,5r)^2 = \frac{127}{4} m'_2 r^2, \quad (14)$$

$$I''_2 = \frac{m''_2 r^2}{2} + m''_2 (5,5r)^2 = \frac{124}{4} m''_2 r^2, \quad (15)$$

де  $m'_2$  – маса суцільної квадратної пластини;  $m''_2$  – маса вирізаного отвору.

Виразимо маси  $m'_2$  і  $m''_2$  через відому масу  $m_2$ .

Позначимо через  $S'_2$ ,  $S''_2$  і  $S_2$  відповідно площі суцільної пластини, вирізаного отвору і пластини з отвором. Тоді

$$m'_2 = \gamma S'_2 = 9\gamma r^2; \quad m''_2 = \gamma S''_2 = \gamma \pi r^2,$$

де  $\gamma$  – маса одиниці площі:

$$\gamma = \frac{m_2}{S_2} = \frac{m_2}{S'_2 - S''_2} = \frac{m_2}{(9 - \pi)r^2}.$$

Тоді

$$m'_2 = \frac{9m_2}{9-\pi}; m''_2 = \frac{\pi m_2}{9-\pi}. \quad (16)$$

Використовуючи вирази (13)–(16), отримаємо

$$I_2 = 32,4m_2r^2 = 162mr^2. \quad (17)$$

Підставимо (12) і (17) в (11):

$$I_x = 166mr^2. \quad (18)$$

Обчислимо коефіцієнти  $n$  і  $k^2$ . Підставимо (18) в (9):

$$n = \frac{1}{83} \frac{\alpha}{m} = 2c^{-1}; k^2 = \frac{49}{166} \frac{c}{m} = 104c^{-2}.$$

Для інтегрування диференціального рівняння (10) складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$d^2 + 2nd + k^2 = 0;$$

$$d_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}; d_{1,2} = -2 \pm 10i.$$

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд

$$\varphi = ae^{-2t} \sin(10t + \beta), \quad (19)$$

де  $a$  і  $\beta$  – постійні інтегрування, які знаходяться з урахуванням початкових умов.

Рівняння (19) є шуканим рівнянням коливального руху тіла. Коливання, які характеризуються рівнянням (19), є затухаючими, тому що амплітуда коливань  $A = ae^{-2t}$  з часом зменшується.

Знайдемо постійні  $a$  і  $\beta$ . Запишемо початкові умови: при  $t=0$   $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_0$ .

Знайдемо похідні від часу з виразу (19):

$$\dot{\varphi} = -2\varphi + 10ae^{-2t} \cos(10t + \beta). \quad (20)$$

Підставляючи початкові умови у вирази (19) і (20), отримаємо систему двох рівнянь для знаходження  $a$  і  $\beta$ :

$$\varphi_0 = a \sin \beta; \omega_0 = -2\varphi_0 + 10a \cos \beta.$$

Звідси знаходимо

$$a = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{(\omega_0 + 2\varphi_0)^2}{100}}; \quad \text{tg } \beta = \frac{10\varphi_0}{\omega_0 + 2\varphi_0}.$$

Період малих коливань знаходиться з формули

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{2\pi}{10} = 0,628 \text{ с.}$$

## Відповіді

### Задача 1.1

Варіант	$\omega_B$	$\tau$	$\phi_1$ , рад	Варіант	$\omega_B$	$\tau$	$\phi_1$ , рад
1	2,17	1,05	2,17	16	2,33	29,12	67,86
2	2,69	19,3	74,7	17	2,71	6,14	15,6
3	2,56	0,87	1,98	18	1,83	2,34	4,1
4	2,05	3,2	6,19	19	1,43	2,17	4,47
5	2,06	5,12	10,54	20	2,8	3,67	9,15
6	1,88	1,05	1,88	21	2,33	4,54	12,79
7	1,25	3,85	6,95	22	1,55	4,15	6,07
8	2,22	13,86	27,35	23	2,11	7,47	15,77
9	2,74	4,78	12,35	24	1,80	2,7	4,65
10	2,23	0,88	2,86	25	2,18	0,28	0,91
11	2,80	2,33	6,53	26	2,33	3,18	6,59
12	1,54	0,55	0,81	27	2,04	4,64	8,97
13	2,19	5,78	18,25	28	2,00	22,36	42,16
14	1,43	0,55	0,7	29	2,60	14,43	37,52
15	1,65	1,07	1,66	30	1,56	0,78	1,16

### Задача 1.2

Варіант	$\omega$ , $c^{-1}$										
1	5,15	6	1,6	11	3,42	16	19	21	5,54	26	15,2
2	3,32	7	40,8	12	0,54	17	3,96	22	0,6	27	0,47
3	21,8	8	0,58	13	5,57	18	1,6	23	9	28	5,67
4	7,15	9	4,72	14	1,53	19	10,6	24	42,1	29	6,9
5	75,5	10	0,9	15	13,7	20	4,18	25	11,1	30	4,52

### Задача 2.1

Варіант	Q, кН										
1	5,3M	6	16,7M	11	13,6F	16	81,6M	21	21,2M	26	1980M
2	8,7M	7	2,98M	12	55,7F	17	56,6F	22	286M	27	48F
3	19,4M	8	55M	13	10,7F	18	64F	23	30M	28	$104,8 \frac{O_1 A}{h} F$
4	42,5M	9	12F	14	292M	19	342M	24	38,3F	29	15,4M
5	23,1M	10	3,18F	15	140F	20	35F	25	430M	30	21,5M

### Задача 2.2

Варіант	C										
1	0,74	6	0,13	11	0,29	16	0,19	21	0,17	26	0,33
2	0,54	7	0,27	12	0,33	17	0,26	22	0,45	27	0,18
3	0,56	8	0,59	13	0,15	18	0,38	23	0,16	28	0,3
4	0,16	9	0,56	14	0,67	19	0,34	24	0,22	29	0,28
5	0,1	10	0,67	15	0,25	20	0,42	25	0,39	30	0,11

### Задача 2.3

Вариант	$\varphi$	Вариант	$\varphi$
1	$\frac{\omega_0}{4} e^{-2t} \sin 4t$	16	$\frac{\omega_0}{3} e^{-t} \sin 3t$
2	$\frac{\omega_0}{3} e^{-t} \sin 3t$	17	$\varphi_0 \cos 6t$
3	$\varphi_0 \cos 2t$	18	$\frac{\omega_0}{\sqrt{7}} e^{-3t} \sin \sqrt{7} t$
4	$1,29 \varphi_0 e^{-1,6t} \sin (1,96t + 0,28\pi)$	19	$\frac{\omega_0}{3} e^{-9t} \sin 3t$
5	$\frac{\omega_0}{2} \sin 2t$	20	$\varphi_0 \cos 8t$
6	$\varphi_0 \cos 2t$	21	$\frac{\omega_0}{3} e^{-3t} \sin 3t$
7	$\frac{\omega_0}{3} \sin 3t$	22	$\sqrt{2} \varphi_0 e^{-t} \sin (t + \frac{\pi}{4})$
8	$\frac{\omega_0}{10} e^{-5t} \sin 10t$	23	$\varphi_0 \cos 3 \sqrt{2} t$
9	$\frac{\omega_0}{4} \sin 4t$	24	$\frac{\omega_0}{12} \sin 12t$
10	$\sqrt{2} \varphi_0 e^{-2t} \sin (2t + \frac{\pi}{4})$	25	$\frac{\omega_0}{10\sqrt{3}} \sin 10\sqrt{3} t$
11	$\frac{\omega_0}{4} \sin 4t$	26	$\frac{\omega_0}{3} e^{-t} \sin 3t$

Продовж. задачі 2.3

Вариант	$\varphi$	Вариант	$\varphi$
12	$\frac{\omega_0}{5} e^{-4.5t} \sin 5t$	27	$\varphi_0 \cos 8t$
13	$\varphi_0 \cos 7t$	28	$\omega_0 e^{-3t} \sin t$
14	$\frac{\omega_0}{2\sqrt{39}} e^{-6t} \sin 2\sqrt{39} t$	29	$\frac{\omega_0}{7} e^{-7t} \sin 7t$
15	$\frac{\omega_0}{4} \sin 4t$	30	$\frac{\omega_0}{\sqrt{8}} e^{-t} \sin \sqrt{8} t$

**Рекомендована література**

1. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1968. – 390 с.

2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. – М.: Физмат ГИЗ, 1972. – Ч.II. – 620 с.

3. Бутенин Н.В., Луц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1971. – Ч.II. – 460 с.

4. Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.

5. Васильев Ю.П., Вялых В.А., Руденко А.Г. Задачи теоретической механики в расчетах судовых механизмов и машин. – Николаев: НКИ, 1977. – 57 с.

6. Павловский М.А., Путьята Т.В. Курс теоретической механики. – К.: Вища школа, 1985. – 328 с.

7. Руденко А.Г. Методические указания к решению задач методами аналитической механики. – Николаев: НКИ, 1984. – 40 с.

8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А.А Яблонский и др. – М.: Высшая школа, 1972. – 430 с.

9. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1971. – Ч. II. – 490 с.

Навчальне видання

**РУДЕНКО ОЛЕКСАНДР ГРИГОРОВИЧ  
ЗОЛОТИЙ ЮРІЙ ГРИГОРОВИЧ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ  
ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ РОБІТ З ДИНАМІКИ  
МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ**

*(українською мовою)*

Редактор *М.П. Фоміна*  
Комп'ютерна правка та верстка *В.Г. Мазанко*  
Коректор *М.О. Паненко*

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,  
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції  
ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

Підписано до друку 00.00.06. Папір офсетний. Формат 60×84/16.  
Друк офсетний. Гарнітура "Таймс". Ум. друк. арк. 4,0. Обл.-вид. арк. 4,3.  
Тираж 500 прим. Вид. № 48. Зам. № 217. Ціна договірна

---

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування,  
54002, м. Миколаїв, вул. Скороходова, 5



