

# ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДЛЯ РАЗРАБОТКИ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОНОНАБОРНЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ ТАНКЕРОВ

И. Л. Михелев, канд. техн. наук

*Национальный университет кораблестроения, г. Николаев*

**Аннотация.** Приведены алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния мононаборных судовых перекрытий в рамках модели ортотропной пластины с использованием комбинации приближенных методов математического анализа. Результаты работы могут быть использованы при разработке ЭВМ-программ для расчетов и анализа компонентов напряженно-деформированного состояния мононаборных перекрытий.

**Ключевые слова:** мононаборное перекрытие, напряженно-деформированное состояние, модель ортотропной пластины, численные методы, алгоритмы расчета.

**Анотація.** Наведено алгоритми розрахунку напружено-деформованого стану мононабірних судових перекриттів у рамках моделі ортотропної пластини з використанням комбінації наближених методів математичного аналізу. Результати роботи можуть бути використані при розробці ЕОМ-програм для розрахунків та аналізу компонентів напружено-деформованого стану мононабірних перекриттів.

**Ключові слова:** мононабірне перекриття, напружено-деформований стан, модель ортотропної пластини, чисельні методи, алгоритми розрахунку

**Abstract.** Calculation algorithms of stress-strain state of marine unidirectional-girder-systems within the frame of orthotropic plate model with application of approximate techniques of mathematical analysis combination are presented. The results of work can be used in computer software development for calculation and analysis of stress-strain components state of unidirectional-girder-systems.

**Keywords:** unidirectional girder systems, stress-strain state, orthotropic plate model, approximate techniques mathematical analysis, calculation algorithms

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Эволюция конструкции танкеров связана с ростом их размерений и применением новых конструкций исходя из требований охраны окружающей среды.

С целью предотвращения загрязнения моря и побережья приняты Международная конвенция «International Conference on Marine Pollution» 1973 г. и дополнения к этой конвенции

(1978 г.). Выполнение требований Конвенции MARPOL 73/78 приводит к необходимости постройки танкеров с двойными бортами и двойным дном, а также к увеличению количества грузовых танков, что увеличивает массу корпуса, усложняет грузовую систему и повышает стоимость постройки судов.

Новый подход к оценке эксплуатационно-экономической эффективности танкеров и

дальнейшие поиски рациональной конструкции их корпусов привели к полностью двухслойному корпусу с различными системами набора. По технологическим параметрам предпочтение отдается мононаборным конструкциям корпуса с продольной системой набора, поскольку повышается уровень использования материала корпуса в сопротивлении общему изгибу и частично изгибу перекрытий. Мононаборные конструкции не относятся к категории регламентируемых Правилами классификационных обществ, поэтому возникает необходимость в разработке методов расчета прочности и жесткости отдельных перекрытий и корпуса судна в целом.

В Украине приоритет в исследованиях напряженно-деформированного состояния (НДС) и проблем проектирования мононаборных перекрытий принадлежит кафедре строительной механике корабля НУК. Этим вопросам в разное время были посвящены научные статьи и исследования в рамках государственных бюджетных тем. В известной зарубежной литературе поднимается проблема применения мононаборных перекрытий как в гражданском, так и в военном судостроении и описываются в основном их технологические преимущества.

**ЦЕЛЬ СТАТЬИ** — разработка алгоритмов для детального исследования НДС прямоугольных судовых мононаборных перекрытий с продольным расположением стенок.

### ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Указанные алгоритмы базируются на полученных аналитических решениях основных уравнений, описывающих НДС мононаборного перекрытия в рамках математической модели ортотропной пластины. Как с точки зрения точности, так и в вычислительном плане они предпочтительнее алгоритмов, основанных на дискретных численных методах, таких, например, как метод конечных элементов, тем более, что эти алгоритмы для расчета НДС мононаборных перекрытий не разработаны.

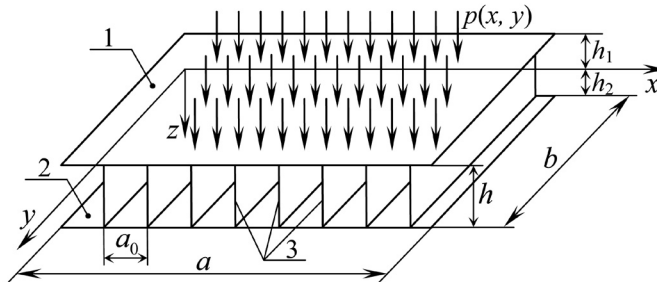
Расчетная схема судового мононаборного перекрытия, при действии поперечной нагрузки представлена на рис. 1.

В рамках модели ортотропной пластины прогиб мононаборного перекрытия  $w$  под действием внешней поперечной нагрузки  $p(x, y)$  можно описать следующим дифференциальным уравнением [2, 3]:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y). \tag{1}$$

Входящие в (1) приведенные жесткостные характеристики перекрытия имеют вид

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{Eh^2}{1-\mu^2} (t_1 \beta_1^2 + t_2 \beta_2^2); & D_2 &= \frac{Eh^2}{1-\mu^2} (\alpha_1^2 t_1 + (1-\alpha_1)^2 t_2) + \frac{EF_0 h^2}{a_0} \left( \alpha_1^2 - \alpha_1 + \frac{1}{3} \right); \\ 2D_3 &= \frac{2\mu E h^2}{1-\mu^2} (\alpha_1 \beta_1 t_1 + (\alpha_1 - 1) \beta_2 t_2) + Gh^2 (\alpha_1 + \beta_1)^2 t_1 + (\beta_2 + \alpha_1 - 1)^2 t_2, \end{aligned} \right\} \tag{2}$$



**Рис. 1.** Конструкция и расчетная схема мононаборного судового перекрытия: 1 — верхний настил; 2 — нижний настил; 3 — стенки балок перекрытия

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= -\psi\alpha_1; \quad \beta_2 = \psi(1 - \alpha_1); \\ \alpha_1 &= \frac{S_2(1 + \omega) + 0,5F_0}{(S_1 + S_2)(1 + \omega) + F_0}; \quad \psi = \frac{2\mu\eta_{12} + (1 - \mu)\eta_{21}}{2\eta_1 + (1 - \mu)\eta_{21}}; \\ 2\omega &= (1 - \mu)(1 - \psi)\eta_{21} - 2\mu\psi\eta_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{12} &= \frac{k_{12}}{k_2}; \quad \eta_{21} = \frac{k_{21}}{k_2}; \quad \eta_1 = \frac{k_1}{k_2}; \\ k_1 &= \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy; \quad k_2 = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy; \\ k_{12} &= \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy; \quad k_{21} = \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$F_0 = ht_0$ ;  $S_i = a_0 t_i / (1 - \mu^2)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $t_1, t_2$  — толщины верхнего и нижнего настилов перекрытия;  $t_0, h$  — толщина и высота продольных стенок перекрытия соответственно;  $a_0$  — расстояние между продольными стен-

ками;  $E, G = E/2(1 + \mu)$  — модули упругости первого и второго рода;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Далее по вычисленному прогибу определяются перемещения:

$$v_1 = \alpha_1 h \frac{\partial w}{\partial y}; \quad v_2 = (\alpha_1 - 1) h \frac{\partial w}{\partial y}; \quad u_1 = \beta_1 h \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u_2 = \beta_2 h \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (5)$$

а затем напряжения в стенках и настилах перекрытия на основе уравнений Коши и закона Гука [4]:

$$\sigma_{ix} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial y} \right); \quad \sigma_{iy} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x} \right); \quad \tau_{ixy} = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right), \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Формулы (2)–(4) показывают, что приведенные жесткостные характеристики перекрытия как ортотропной пластины  $D_i$  зависят от прогиба  $w$ . Поэтому аналитическое интегрирование уравнения (1) совместно с этими нелинейными зависимостями затруднительно и приходится использовать комбинацию двух численных методов: метода решения дифференциального уравнения (1) в предположении, что приведенные жесткостные характеристики известны, и метода последовательных приближений для уточнения  $D_i$ .

В качестве одного из возможных численных решений дифференциального уравнения (1) выберем решение в форме М. Леви [3], а совместная реализация этого метода и метода последовательных приближений осуществим по следующему алгоритму.

В нулевом приближении задается форма прогиба ортотропной пластины, близкая к ожидаемой, например, одним первым членом ряда. Затем по формулам (2)–(4) вычисляются постоянные  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2$ , и приведенные жесткости  $D_i$ . При известных  $D_i$  в нулевом приближении находится решение линейного дифференциального уравнения (1) методом М. Леви. Далее по прогибу нулевого приближения последовательно вычисляется  $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, D_i, w$  первого приближения. В последующих приближениях этот процесс повторяется до тех пор, пока жесткости  $n$ -го приближения не будут отличаться от жесткостей  $(n - 1)$ -го приближения на величину необходимой погрешности  $\epsilon$ .

Приведем формы изгиба ортотропной пластины для нулевого приближения и вычисленные по ним и формулам (4) стартовые

значения параметров  $\eta_1, \eta_{12}, \eta_{21}$ , для двух случаев устройства опорного контура.

Для пластин, свободно опертых на всех кромках,

$$\left. \begin{aligned} w(\xi; \eta) &= \sin \pi \xi \sin \pi \eta; \\ \eta_1 &= \gamma^4; \quad \eta_{12} = \eta_{21} = \gamma^2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\xi = x/a$ ;  $\eta = y/b$ ;  $\gamma = b/a$ ;  $a, b$  — ширина и длина перекрытия.

Для пластин, свободно опертых на кромках  $x = 0$ ;  $a$  и жестко заделанных по кромкам  $y = 0$ ;  $b$ ,

$$\left. \begin{aligned} w(\xi; \eta) &= \sin \pi \xi (1 - \cos 2\pi \eta); \\ \eta_1 &= \frac{3}{16} \gamma^4; \quad \eta_{12} = \eta_{21} = \frac{1}{4} \gamma^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Остановимся на решениях дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластины в форме М. Леви.

Известны три формы решения дифференциального уравнения (1) в зависимости от соотношения приведенных жесткостей  $D_i$  при

$$f_n^{IV}(\eta) - \delta_2 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 f_n''(\eta) + \delta_1 \left( \frac{n\pi}{a} \right)^4 f_n(\eta) = \frac{p_n(\eta)}{D_2}, \quad (10)$$

где  $\delta_1 = D_1/D_2$ ;  $\delta_2 = 2D_3/D_2$ ;

$$p_n(\eta) = 2 \int_0^1 p(\xi, \eta) \sin n\pi \xi d\xi. \quad (11)$$

Общее решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения (10) состоит из общего решения однородного дифференциального уравнения и частного неоднородного уравнения:  $f_n(\eta) = f_{0n}(\eta) + f_{1n}(\eta)$ .

Для отыскания  $f_{0n}(\eta)$  можно воспользоваться подстановкой Л. Эйлера, которая приводит к биквадратному характеристическому уравнению

$$\left( \frac{a}{n\pi} \right)^4 k^4 - \left( \frac{a}{n\pi} \right)^2 \delta_2 k^2 + \delta_1 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$k_{1,2,3,4} = \pm \delta \frac{n\pi}{a} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \omega^2}}, \quad (12)$$

где

$$\delta = \sqrt{D_3 / D_2}; \quad \omega^2 = D_1 D_2 / D_3^2. \quad (13)$$

В зависимости от величин (13) корни (12) и общие решения однородного уравнения (10) будут иметь различную структуру.

всех  $D_i > 0$  [4]. Однако при определенной комбинации геометрических параметров перекрытия, а именно когда  $\gamma \leq 1$  и  $\omega^2 = D_1 D_2 / D_3^2 > 1$ , приведенная крутильная жесткость  $D_3$  вычисленная в нулевом приближении по формулам (2) с учетом (3), (4) и (7), (8), становится меньше нуля, в то время как приведенные жесткости  $D_1$  и  $D_2$  положительны. Решения (1) при  $D_3 < 1$  были получены в работе [3]. Ниже приведены все шесть форм решения уравнения (1), охватывающие указанные случаи поведения приведенных жесткостей  $D_i$ .

В соответствии с методом М. Леви прогиб во всех случаях задается в виде одинарного ряда Фурье

$$w(\xi; \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\eta) \sin n\pi \xi, \quad (9)$$

где  $f_n(\eta)$  — неизвестные функции, которые определяются из обыкновенного дифференциального уравнения, получаемого подстановкой аппроксимации (9) в уравнение (1):

Когда все  $D_i > 0$ , величина  $\delta$  вещественна и имеем три случая:

1)  $\omega^2 = 1$  — четыре корня вещественны и попарно одинаковы,

$$\begin{aligned} f_{0n}(\eta) &= (B_{1n} + B_{2n}\eta) \text{sh } a_{0n}\eta + \\ &+ (B_{3n} + B_{4n}\eta) \text{ch } a_{0n}\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $a_{0n} = \delta n\pi\gamma$ .

2)  $\omega^2 < 1$  — четыре корня вещественны и различны,

$$\begin{aligned} f_{0n}(\eta) &= B_{1n} \text{sh } a_{1n}\eta + B_{2n} \text{ch } a_{1n}\eta + \\ &+ B_{3n} \text{sh } a_{2n}\eta + B_{4n} \text{ch } a_{2n}\eta, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $a_{1n} = s_1 n\pi\gamma$ ,  $a_{2n} = s_2 n\pi\gamma$ ,  $s_1 = \delta \sqrt{1 + \sqrt{1 - \omega^2}}$ ;  $s_2 = \delta \sqrt{1 - \sqrt{1 - \omega^2}}$ .

3)  $\omega^2 > 1$  — корни попарно комплексно-сопряженные,

$$\begin{aligned} f_{0n}(\eta) &= (B_{1n} \cos \beta_{2n}\eta + B_{2n} \sin \beta_{2n}\eta) \text{sh } \beta_{1n}\eta + \\ &+ (B_{3n} \sin \beta_{2n}\eta + B_{4n} \cos \beta_{2n}\eta) \text{ch } \beta_{1n}\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\beta_{1n} = n\pi\gamma\delta \sqrt{(1 + \omega) / 2}$ ;

$$\beta_{2n} = n\pi\gamma\delta \sqrt{(1 - \omega) / 2}.$$

Когда  $\{D_1, D_2\} > 0$ , а  $D_3 < 0$ , величина  $\delta$  оказывается мнимой. Тогда корни (12) принимают вид

$$k_{1,2,3,4} = \pm \delta \frac{n\pi}{a} \sqrt{-1 \pm \sqrt{1 - \omega^2}},$$

где  $\delta = \sqrt{|D_3|/D_2}$ , а общие решения одно-  
родного уравнения (10) таковы:

1)  $\omega^2 = 1$  — мнимые кратные корни,

$$f_{0n}(\eta) = (B_{1n} + B_{2n}\eta) \cos a_{0n}\eta + (B_{3n} + B_{4n}\eta) \sin a_{0n}\eta; \quad (17)$$

2)  $\omega^2 < 1$  — различные мнимые корни,

$$f_{0n}(\eta) = B_{1n} \cos a_{1n}\eta + B_{2n} \sin a_{1n}\eta + B_{3n} \cos a_{2n}\eta + B_{4n} \sin a_{2n}\eta; \quad (18)$$

3)  $\omega^2 > 1$  — различные комплексно-сопряженные корни,

$$f_{0n}(\eta) = (B_{1n} \cos \beta_{1n}\eta + B_{2n} \sin \beta_{1n}\eta) \operatorname{sh} \beta_{2n}\eta + (B_{3n} \sin \beta_{1n}\eta + B_{4n} \cos \beta_{1n}\eta) \operatorname{ch} \beta_{2n}\eta. \quad (19)$$

В формулах (17)–(19) величины  $a_{in}$  и  $\beta_{in}$  определяются так же, как и в формулах (14)–(16) при  $\delta = \sqrt{|D_3|/D_2}$ .

Если поперечная нагрузка представлена в виде  $p(\xi, \eta) = p_0(\xi) + \eta p_1(\xi) + \eta^2 p_2(\xi) + \eta^3 p_3(\xi)$ , то зависимость (11) позволит найти частное решение неоднородного уравнения (10), справедливое как при  $D_3 > 0$ , так и при  $D_3 < 0$ , в виде

$$f_{1n}(\eta) = K_n (p_{0n} + p_{1n}\eta + p_{2n}(F_n + \eta^2) + p_{3n}\eta(3F_n + \eta^2)),$$

1) при  $\omega^2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} B_{3n} &= -K_n (p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \operatorname{sh} a_{0n} + B_{2n} \operatorname{sh} a_{0n} + B_{3n} \operatorname{ch} a_{0n} + B_{4n} \operatorname{ch} a_{0n} &= -K_n (p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(F_n + 1)); \\ 2B_{2n} a_{0n} + B_{3n} a_{0n}^2 &= -2K_n p_{2n}; \\ B_{1n} a_{0n}^2 \operatorname{sh} a_{0n} + B_{2n} a_{0n} (2 \operatorname{ch} a_{0n} + a_{0n} \operatorname{sh} a_{0n}) + B_{3n} a_{0n}^2 \operatorname{ch} a_{0n} + B_{4n} a_{0n} (2 \operatorname{sh} a_{0n} + a_{0n} \operatorname{ch} a_{0n}) &= \\ &= -2K_n (p_{2n} + 3p_{3n}); \end{aligned} \right\}$$

1) при  $\omega^2 < 1$

$$\left. \begin{aligned} B_{2n} + B_{4n} &= -K_n (p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \operatorname{sh} a_{1n} + B_{2n} \operatorname{ch} a_{1n} + B_{3n} \operatorname{sh} a_{2n} + B_{4n} \operatorname{ch} a_{2n} &= -K_n (p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(3F_n + 1)); \\ B_{2n} a_{1n}^2 + B_{4n} a_{2n}^2 &= -2K_n p_{2n}; \\ B_{1n} a_{1n}^2 \operatorname{sh} a_{1n} + B_{2n} a_{1n}^2 \operatorname{ch} a_{1n} + B_{3n} a_{2n}^2 \operatorname{sh} a_{2n} + B_{4n} a_{2n}^2 \operatorname{ch} a_{2n} &= -2K_n (p_{2n} + 3p_{3n}); \end{aligned} \right\} (20)$$

1) при  $\omega^2 > 1$

$$\left. \begin{aligned} B_{4n} &= -K_n (p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} + B_{2n} \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} + B_{3n} \sin \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} + B_{4n} \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} &= \\ &= -K_n (p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(3F_n + 1)); \\ 2B_{2n} \beta_{1n} \beta_{2n} + B_{4n} (\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2) &= -2K_n p_{2n}; \\ B_{1n} \left( \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2) - \right. & \\ \left. - \sin \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} 2\beta_{1n} \beta_{2n} \right) + B_{2n} \left( \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2) + \right. & \\ \left. + \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} 2\beta_{1n} \beta_{2n} \right) & \\ + B_{3n} \left( \sin \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2) + \right. & \\ \left. + \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} 2\beta_{1n} \beta_{2n} \right) + B_{4n} \left( \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} (\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2) - \right. & \\ \left. - \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} 2\beta_{1n} \beta_{2n} \right) &= -2K_n (p_{2n} + 3p_{3n}). \end{aligned} \right\} (21)$$

где  $K_n = \frac{1}{D_1} \left( \frac{a}{n\pi} \right)^4$ ;  $F_n = \frac{\delta_2}{\delta_1} \frac{2}{(n\pi\gamma)^2}$ .

Постоянные интегрирования  $B_{jn}, j = 1, 2, 3, 4$ , входящие в решения (14)–(16) и (17)–(19), определяются из граничных условий на краях  $y = 0$  и  $y = b$ .

Когда  $D_3 > 0$ , для свободно опертого перекрытия с граничными условиями

$$w(\xi, \eta_0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(\xi, \eta_0) = 0, \quad \eta_0 = 0;$$

разрешающие системы уравнений для определения  $B_{jn}$  имеют следующий вид:

Когда  $D_3 > 0$ , для жесткого защемления продольных стенок перекрытия с граничными условиями  $w(\xi, \eta_0) = \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta_0) = 0$  раз-

решающие системы алгебраических уравнений для определения  $B_{jn}$  имеют вид:

$$1) \omega^2 = 1:$$

$$\left. \begin{aligned} B_{3n} &= -K_n(p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \operatorname{sh} a_{0n} + B_{2n} \operatorname{sh} a_{0n} + B_{3n} \operatorname{ch} a_{0n} + B_{4n} \operatorname{ch} a_{0n} &= -K_n(p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(3F_n + 1)); \\ B_{1n} a_{0n} + B_{4n} &= -K_n(p_{1n} + 3F_n p_{3n}); \\ B_{1n} a_{0n} \operatorname{ch} a_{0n} + B_{2n}(\operatorname{sh} a_{0n} + a_{0n} \operatorname{ch} a_{0n}) + B_{3n} a_{0n} \operatorname{sh} a_{0n} + B_{4n}(\operatorname{ch} a_{0n} + a_{0n} \operatorname{sh} a_{0n}) &= \\ &= -K_n(p_{1n} + 2p_{2n} + 3p_{3n}(F_n + 1)); \end{aligned} \right\}$$

1) при  $\omega^2 < 1$

$$\left. \begin{aligned} B_{2n} + B_{4n} &= -K_n(p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \operatorname{sh} a_{1n} + B_{2n} \operatorname{ch} a_{1n} + B_{3n} \operatorname{sh} a_{2n} + B_{4n} \operatorname{ch} a_{2n} &= -K_n(p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(2F_n + 1)); \\ B_{1n} a_{1n} + B_{3n} a_{2n} &= -K_n(p_{1n} + 3F_n p_{3n}); \\ B_{1n} a_{1n} \operatorname{ch} a_{1n} + B_{2n} a_{1n} \operatorname{sh} a_{1n} + B_{3n} a_{2n} \operatorname{ch} a_{2n} + B_{4n} a_{2n} \operatorname{sh} a_{2n} &= -K_n(p_{1n} + 2p_{2n} + 3p_{3n}(F_n + 1)); \end{aligned} \right\} (22)$$

1) при  $\omega^2 > 1$

$$\left. \begin{aligned} B_{4n} &= -K_n(p_{0n} + F_n p_{2n}); \\ B_{1n} \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} + B_{2n} \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} + B_{3n} \sin \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} + B_{4n} \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} &= \\ &= -K_n(p_{0n} + p_{1n} + p_{2n}(F_n + 1) + p_{3n}(3F_n + 1)); \\ B_{1n} \beta_{1n} + B_{3n} \beta_{2n} &= -K_n(p_{1n} + 3F_n p_{3n}); \\ B_{1n}(\beta_{1n} \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} - \beta_{2n} \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n}) + B_{2n}(\beta_{2n} \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} + \beta_{1n} \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n}) + \\ + B_{3n}(\beta_{2n} \cos \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n} + \beta_{1n} \sin \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n}) + B_{4n}(\beta_{1n} \cos \beta_{2n} \operatorname{sh} \beta_{1n} - \beta_{2n} \sin \beta_{2n} \operatorname{ch} \beta_{1n}) &= \\ &= -K_n(p_{1n} + 2p_{2n} + 3p_{3n}(F_n + 1)). \end{aligned} \right\} (23)$$

Приведенные решения для случая изгиба ортотропной пластины, а также известные решения теории пластин являются теоретической базой для разработки алгоритмов практических расчетов НДС мононаборных перекрытий для различных граничных условий.

Поскольку приведенная крутильная жесткость  $D_3$  становится отрицательной только в случае  $\omega^2 > 1$ , при исследовании изгиба мононаборного перекрытия в рамках модели ортотропной пластины методом М. Леви в случае  $D_3 < 0$  интерес представляет только решение (19).

Нетрудно заметить, что выражения (19) и (16) одинаковы с точностью до аргументов тригонометрических и гиперболических функций, которые входят в них. Поэтому системы линейных уравнений для определения постоянных интегрирования (21) и (23) остаются в силе для случая  $D_3 < 0$  при  $\beta_{1n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{(1-\omega)}/2$  и  $\beta_{2n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{(1+\omega)}/2$ .

Из анализа приведенных решений основных уравнений НДС мононаборного перекрытия в рамках модели ортотропной пластины видно, что в качестве исходных данных для разработки алгоритма расчета необходимо задать следующие входные параметры.

1. Упругие постоянные материала (стали), из которого изготовлено перекрытие ( $E, \mu$ ).
2. Геометрические параметры мононаборного перекрытия ( $a, b, t_1, t_2, t_0, h, a_0$ ).
3. Данные по поперечной нагрузке, действующей на мононаборное перекрытие (вид нагрузки  $p(\xi, \eta)$ , необходимый для определения коэффициентов аппроксимации нагрузки рядом Фурье по формуле (11); интенсивность поперечной нагрузки  $p_0$ ).
4. Данные, влияющие на точность расчета (количество  $n$  удерживаемых членов в ряде Фурье (9); погрешность  $\epsilon$ , допускаемая в процессе итерационного уточнения жесткостей  $D_i$ ; количество равных отрезков раз-

бияния длины ( $n_1$ ) и ширины ( $n_2$ ) перекрытия для численного нахождения значений двойных интегралов (4)).

5. Координата точки настила перекрытия ( $\xi, \eta$ ), в которой необходимо вычислять компоненты НДС.

После ввода исходных данных необходимо вычислить приведенные жесткостные характеристики  $D_i$  в первом приближении. Для этого реализуется линейный вычислительный процесс: расчет безразмерных параметров  $\eta_{12}$  и  $\eta_{21}$  по формулам (7) или (8); вычисление параметров  $\psi$  и  $\omega$ , а также характеристик положения нейтральной плоскости перекрытия  $\alpha_1$  и  $\beta_i$  по формулам (3); расчет по формулам (2).

Далее, во втором приближении, величины  $\eta_1, \eta_{12}, \eta_{21}$  необходимо определять уже численно. Для этого в зависимости от геометрических параметров мононаборного перекрытия и знака приведенной крутильной жесткости  $D_3$  выбирается структура общего решения однородного и частное решение неоднородного уравнения (10). Необходимо отметить, что из всех возможных общих решений (14)–(16) и (17)–(19) используются

только (15), (16) и (19). С одной стороны, приведенная крутильная жесткость  $D_3$  становится отрицательной только в случае, когда  $\omega^2 > 1$ , что уже отмечалось, и говорит о сугубо теоретическом значении решений (17) и (18). С другой стороны, для исследования НДС мононаборного перекрытия решение (14) не используется, поскольку значение параметра  $\omega^2 = D_1 D_2 / D_3^2$  может быть равно единице только в случае изотропной пластины, когда все ее жесткости одинаковы.

Для нахождения постоянных интегрирования  $B_i$  входящих в решения (15), (16) и (19), формируется соответствующая система линейных алгебраических уравнений, которая затем решается, например, методом Гаусса с частичным упорядочением по строкам.

Таким образом, согласно (4) для нахождения коэффициентов  $k_1, k_2, k_{12}, k_{21}$  путем численного интегрирования с помощью, например, квадратурной формулы метода трапеций появляется возможность однозначного определения для каждого члена ряда Фурье значений следующих соответствующих функций:

при  $D_3 > 0; \omega^2 > 1$  или  $\omega^2 < 1$

$$f_{1n} = K_n (p_{0n} + p_{1n}\eta + p_{2n}(F_n + \eta^2) + p_{3n}\eta(3F_n + \eta^2));$$

$$f'_{1n} = \frac{K_n}{b} (p_{1n} + 2p_{2n}\eta + 3p_{3n}(F_n + \eta^2)); \quad f''_{1n} = \frac{2K_n}{b^2} (p_{2n} + 3p_{3n}\eta);$$

при  $D_3 > 0; \omega^2 > 1$

$$f_{1n} = K_n (p_{0n} + p_{1n}\eta - p_{2n}(F_n - \eta^2) - p_{3n}\eta(3F_n - \eta^2));$$

$$f'_{1n} = \frac{K_n}{b} (p_{1n} + 2p_{2n}\eta - 3p_{3n}(F_n - \eta^2)); \quad f''_{1n \text{ ч.п.}} = \frac{2K_n}{b^2} (p_{2n} + 3p_{3n}\eta);$$

при  $D_3 > 0; \omega^2 < 1$

$$f_{0n} = B_{1n} \text{sh } a_{1n}\eta + B_{2n} \text{ch } a_{1n}\eta + B_{3n} \text{sh } a_{2n}\eta + B_{4n} \text{ch } a_{2n}\eta;$$

$$f'_{0n} = \frac{a_{1n}}{b} (B_{1n} \text{ch } a_{1n}\eta + B_{2n} \text{sh } a_{1n}\eta) + \frac{a_{2n}}{b} (B_{3n} \text{ch } a_{2n}\eta + B_{4n} \text{sh } a_{2n}\eta);$$

$$f''_{0n} = \left(\frac{a_{1n}}{b}\right)^2 (B_{1n} \text{sh } a_{1n}\eta + B_{2n} \text{ch } a_{1n}\eta) + \left(\frac{a_{2n}}{b}\right)^2 (B_{3n} \text{sh } a_{2n}\eta + B_{4n} \text{ch } a_{2n}\eta).$$

В случаях  $\omega^2 > 1; D_3 > 0$  или  $D_3 < 0$  (они одинаковы с точностью до выражений  $\beta_{1n}$  и  $\beta_{2n}$  согласно зависимостям (16) и (19)) вычисляются функции

$$f_{0n} = (B_{1n} \cos \beta_{2n}\eta + B_{2n} \sin \beta_{2n}\eta) \text{sh } \beta_{1n}\eta + (B_{3n} \sin \beta_{2n}\eta + B_{4n} \cos \beta_{2n}\eta) \text{ch } \beta_{1n}\eta;$$

$$f'_{0n} = (-B_{1n} \sin \beta_{2n} \eta + B_{2n} \cos \beta_{2n} \eta) \frac{\beta_{2n}}{b} \operatorname{sh} \beta_{1n} \eta + (B_{1n} \cos \beta_{2n} \eta + B_{2n} \sin \beta_{2n} \eta) \frac{\beta_{1n}}{b} \operatorname{ch} \beta_{1n} \eta +$$

$$+ (B_{3n} \cos \beta_{2n} \eta - B_{4n} \sin \beta_{2n} \eta) \frac{\beta_{2n}}{b} \operatorname{ch} \beta_{1n} \eta + (B_{3n} \sin \beta_{2n} \eta + B_{4n} \cos \beta_{2n} \eta) \frac{\beta_{1n}}{b} \operatorname{sh} \beta_{1n} \eta ;$$

$$f''_{0n} = (B_{1n} \cos \beta_{2n} \eta + B_{2n} \sin \beta_{2n} \eta) \operatorname{sh} \beta_{1n} \eta \frac{\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2}{b^2} + (B_{2n} \cos \beta_{2n} \eta - B_{1n} \sin \beta_{2n} \eta) \operatorname{ch} \beta_{1n} \eta \frac{2\beta_{1n}\beta_{2n}}{b^2} +$$

$$+ (B_{3n} \sin \beta_{2n} \eta + B_{4n} \cos \beta_{2n} \eta) \operatorname{ch} \beta_{1n} \eta \frac{\beta_{1n}^2 - \beta_{2n}^2}{b^2} + (B_{3n} \cos \beta_{2n} \eta - B_{4n} \sin \beta_{2n} \eta) \operatorname{sh} \beta_{1n} \eta \frac{2\beta_{1n}\beta_{2n}}{b^2} .$$

По найденным  $k_1, k_2, k_{12}, k_{21}$  определяют значения параметров  $\eta_1, \eta_{12}, \eta_{21}$  на основании формул (4), (9).

Наконец, вычисленные значения  $\eta_1, \eta_{12}, \eta_{21}$  будут исходными для нахождения значений приведенных жесткостей  $D_i$  во втором приближении.

В дальнейшем процесс последовательного приближения приведенных жесткостей к своим асимптотическим значениям продолжается до тех пор, пока модуль разности жесткости  $D_1$  вычисленной в текущем и предыдущем приближениях, не будет меньше заданной погрешности  $\varepsilon$

Выбор степени малости значения  $\varepsilon$  определяется тем, насколько сильно влияет точность вычисления значений приведенных жесткостей на величины компонентов НДС мононаборного перекрытия, поэтому значение  $\varepsilon$  находится путем численного эксперимента, т. е. подбором.

После вычисления приведенных жесткостных характеристик осуществляется расчет компонентов НДС следующим образом.

Вводятся исходные данные и определяются геометрические параметры мононаборного перекрытия; выбираются соответствующие решения дифференциального уравнения (10). Постоянные интегрирования  $B_p$ , входящие в эти решения, определяются, как и при уточнении приведенных жесткостных характеристик: в зависимости от геометрических параметров перекрытия ( $\omega^2$ ), граничных условий на продольных кромках и знака приведенной крутильной жесткости  $D_3$  формируются соответствующая матрица коэффициентов при неизвестных и вектор правых частей системы

линейных алгебраических уравнений соответственно по формулам (20), (21), (22), (23) либо (21), (23) при

$$\beta_{1n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{\frac{1-\omega}{2}}, \quad \beta_{2n} = n\pi\gamma\delta\sqrt{\frac{1+\omega}{2}} .$$

Полученная система решается затем методом Гаусса.

Очевидно, что описанная процедура нахождения функции  $f(\eta)$  выполняется для каждого члена ее разложения в ряд Фурье, а вычисление компонентов НДС в некоторой точке настила перекрытия с координатой  $(\xi, \eta)$  происходит с помощью суммирования, согласно с формулами (9), (5) и (6).

Отметим, что если число удерживаемых членов в ряду Фурье (9) при определении значений приведенных жесткостей мононаборного перекрытия влияет в основном на скорость их сходимости к асимптотическим значениям, то в случае расчета НДС данного перекрытия число членов ряда  $n$  влияет уже на точность вычисления компонентов  $w, u_y, v_y, \sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \sigma_{ixy}$ . Таким образом, для расчета НДС число  $n$  зависит от скорости и характера сходимости ряда (9), которые должны исследоваться с целью определения приемлемой для практики точности.

## ВЫВОД

Разработанные подробные алгоритмы для расчета и детального анализа компонентов НДС прямоугольных мононаборных перекрытий танкеров при действии на них поперечного давления в рамках математической модели ортотропной пластины являются основой для программной реализации указанных расчетов на ЭВМ.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.
- [2] *Кочанов Ю.П.* Изгиб судового перекрытия с балками одного направления // Строительная механика корабля: Сб. науч. трудов. — Николаев: НКИ, 1988. — С. 3–13.
- [3] *Михелев И.Л.* Изгиб мононаборного перекрытия как ортотропной пластины / Миколаїв, УДМУ, 1995. — 14 с. — Деп. в ГНТБ Украины 17.07.95, № 1842 — Ук. 95.
- [4] Справочник по строительной механике корабля / Бойцов Г.В., Палий О.М., Постнов В.А., Чувиковский В.С. — В 3 т. — Л.: Судостроение. — 1982. — Т. 1. — 367 с., Т. 2. — 464 с.; Т. 3. — 320 с.