

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний університет кораблебудування  
імені адмірала Макарова

**А. М. КУЗНЕЦОВ, О. Л. ЧОРНИЙ**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ  
РІВНЯНЬ У КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСАХ**

**У двох частинах**

**Частина I**

*Рекомендовано Методичною радою НУК*

Електронне видання  
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2013

УДК 517.91(076)  
ББК 22.1я73  
К 89

*Укладачі:*

А. М. Кузнецов, кандидат фізико-математичних наук, професор Національного університету кораблебудування;  
О. Л. Чорний, викладач

*Рецензент* В. П. Фролов, кандидат фізико-математичних наук, доцент  
**Кузнецов А. М.**

К 89 Методичні вказівки до застосування диференціальних рівнянь у коливальних процесах : у 2 ч. – Ч. I / А. М. Кузнецов, О. Л. Чорний. – Миколаїв : НУК, 2013. – 59 с.

Методичні вказівки відносяться до серії РОЗВ'ЯЗНИК. У них розглядається 60 задач теоретичної механіки на вільні коливання та на вплив опору на вільні коливання. Розв'язання таких задач є ніщо інше, як застосування теорії диференціальних рівнянь до руху матеріальної точки.

Призначені для студентів денної і заочної форм навчання, які вивчають відповідні розділи у вищій математиці й теоретичній механіці в умовах кредитно-модульної системи.

У дужках указано номер задачі зі збірника [4].

УДК 517.91(076)  
ББК 22.1я73

Навчальне видання

**КУЗНЕЦОВ Альберт Миколайович  
ЧОРНИЙ Олександр Леонідович**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ  
ДО ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ  
РІВНЯНЬ У КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСАХ**

**У двох частинах**

**Частина I**

Комп'ютерне верстання *А. Й. Лихіна*  
Коректор *М. О. Паненко*

© Кузнецов А. М., Чорний О. Л., 2013  
© Національний університет кораблебудування  
імені адмірала Макарова, 2013

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 3,4. Обсяг даних 1333 кб. Тираж 14 прим. Вид. № 4. Зам. № 113.  
Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова  
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025, e-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

## *Коливальний рух*

У сучасній техніці колювання мають дуже важливе значення. Розв'язання задач на коливальний рух є ніщо інше, як застосування теорії диференціальних рівнянь руху точки. Фактично ми будемо розв'язувати другу основну задачу динаміки – визначити закон руху точки, якщо відомі діючі на неї сили.

Розв'язання задач про коливальний рух матеріальної точки проводиться у такому порядку:

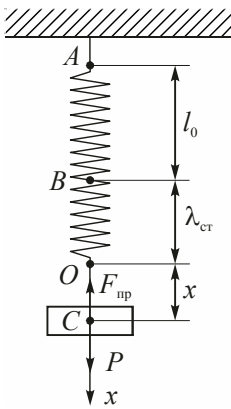
1. Вибирається система відліку, в якій початок координат вибирається у положенні статичної рівноваги точки.
2. Розглядаються і відображаються на схемі сили, які діють на точку при деякому її відхиленні.
3. Складається рівняння руху у векторній формі та його проекція на вісь, тобто складається диференціальне рівняння руху.
4. Розв'язуючи це рівняння, відшукуємо загальний розв'язок диференціального рівняння.
5. Знаючи початкові умови, відшукуємо довільні сталі, а значить частинний розв'язок диференціального рівняння (д.р.).

## 1. Вільні коливання

**1 (7.1).** Пружина  $AB$ , закріплена одним кінцем у точці  $A$ , така, що для подовження її на 1 м необхідно прикласти у точці  $B$  при статичному навантаженні силу 19,6 Н. У деякий момент часу до нижнього кінця  $B$  недеформованої пружини підвішують гирю  $C$  масою 0,1 кг і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння подальшого руху гирі і вказати амплітуду та період її коливань відносно руху до осі, проведеної вертикально вниз із положення статичної рівноваги гирі.

### Розв'язання

Розглядаємо гирю як матеріальну точку. Вибираємо за початок осі  $x$  точку  $O$ , в якій знаходиться центр ваги при її статичній рівновазі, і на-



правляємо вісь  $x$  по вертикалі вниз. Позначимо через  $\lambda_{\text{ст}}$  подовження пружини в положенні  $O$  статичної рівноваги гирі, а через  $x$  – переміщення гирі від цього положення. Тоді загальне положення пружини в довільному положенні  $C$  гирі при її русі буде  $\lambda = \lambda_{\text{ст}} + x$ . Сила пружності  $\vec{F}_{\text{пр}}$  пропорційна її загальному подовженню, тобто  $F_{\text{пр}} = c\lambda = c(\lambda_{\text{ст}} + x)$ , де  $c$  – коефіцієнт жорсткості. Якщо  $\vec{w}$  – вектор прискорення,  $\vec{P}$  – вага гирі,  $m$  – її маса, то за другим законом Ньютона маємо:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{пр}}. \quad (1)$$

Проектуємо (1) на вісь  $x$ :

$$mw_x = P_x + F_{x \text{ пр}},$$

$$m\ddot{x} = P - c(x + \lambda_{\text{ст}}). \quad (2)$$

У положенні статичної рівноваги  $P = c \cdot \lambda_{\text{ст}}$ , тоді  $m\ddot{x} + cx = 0$ .

Оскільки  $\frac{c}{m} = k^2 = \frac{19,6}{0,1} = 196 \text{ (с}^{-2}\text{)}$ , то  $\ddot{x} + k^2x = 0$ . Характеристичне

рівняння для даного диференціального рівняння

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = \pm ki = \pm 14i.$$

Загальний розв'язок д.р.:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (3)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо з початкових умов руху точки.

При  $t = 0$   $x_0 = -\lambda_{\text{ст}}$ , швидкість  $V_0 = 0$ . Диференціюємо (3):

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt). \quad (4)$$

Підставляючи початкові дані в рівняння (3) і (4), одержуємо систему

$$\begin{cases} -\lambda_{\text{ст}} = C_1 \\ 0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{P}{c} = -\frac{mg}{c} = -\frac{980}{196} = -5 \text{ (см)} = -0,05 \text{ (м)}. \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Закон руху  $x = \underline{\underline{-0,05 \cos 14t}}$ . Період коливань  $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} =$

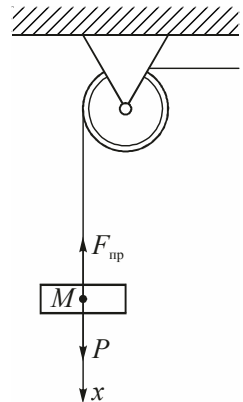
$$= 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1}{19,6}} = \underline{\underline{0,45 \text{ с.}}}$$

**2 (7.2).** При рівномірному спуску вантажу масою  $m = 2$  т зі швидкістю  $v = 5$  м/с виникла несподівана затримка верхнього кінця троса, на якому опускався вантаж. Нехтуючи масою троса, визначити його найбільший натяг при наступних коливаннях вантажу, якщо коефіцієнт жорсткості троса  $4 \cdot 10^6$  Н/м.

*Розв'язання*

Аналогічно попередній задачі одержуємо наступне д.р. руху:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{c}{m}.$$



Його загальний розв'язок:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;$$

тоді швидкість руху  $\dot{x} = -k(C_1 \sin kt - C_2 \cos kt)$ .

Використовуємо початкові умови: при  $t = 0$   $x_0 = 0$ ,  $V_0 = 5$  м/с.

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ V_0 = C_2 k \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{k} = V_0 \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Отже,

$$x = V_0 \sqrt{\frac{m}{c}} \sin kt; \quad x_{\max} = V_0 \sqrt{\frac{m}{c}}.$$

Максимальна величина натягу троса:

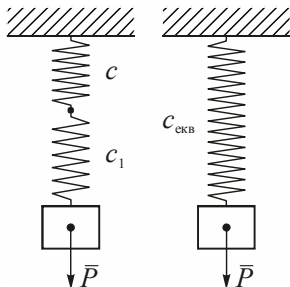
$$F_{\max} = c(\lambda_{\text{ст}} + x_{\max}) = c \cdot \lambda_{\text{ст}} + c \cdot x_{\max}.$$

Ураховуючи, що  $c \cdot \lambda_{\text{ст}} = mg$ , одержуємо:

$$\begin{aligned} F_{\max} &= mg + c \cdot V_0 \sqrt{\frac{m}{c}} = mg + V_0 \sqrt{mc} = 2000 \cdot 9,8 + 5 \sqrt{2000 \cdot 4 \cdot 10^6} = \\ &= \underline{\underline{466,8}} \text{ кН.} \end{aligned}$$

**3 (7.3).** Визначити найбільший натяг троса у попередній задачі, якщо між вантажем і тросом вставлена пружина з коефіцієнтом жорсткості

$$c_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Н/м.}$$



*Розв'язання*

Замінімо дві пружини однією, еквівалентною, з коефіцієнтом жорсткості  $c_{\text{екв}}$ .

З одного боку, для цієї пружини

$$\lambda_{\text{ст}} = \lambda'_{\text{ст}} + \lambda''_{\text{ст}} = \frac{P}{c} + \frac{P}{c_1} = \frac{P(c + c_1)}{c \cdot c_1}. \quad (1)$$

З іншого боку,

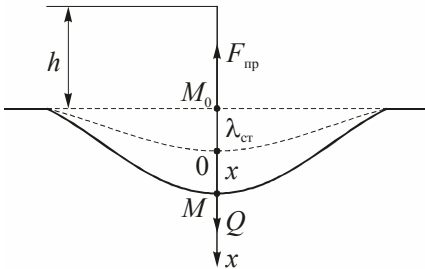
$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c_{\text{екв}}}. \quad (2)$$

$$\text{Із рівнянь (1) та (2) маємо: } c_{\text{екв}} = \frac{c \cdot c_1}{c + c_1} = \frac{4 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^5}{44 \cdot 10^5} = \frac{4 \cdot 10^6}{11} \text{ Н/м,}$$

$$F_{\text{max}} = P + V_0 \cdot \sqrt{m \cdot c_{\text{екв}}} = 2000 \cdot 9,8 + 5 \sqrt{2000 \cdot \frac{4 \cdot 10^6}{11}} = \underline{\underline{154,4 \text{ кН}}}.$$

**4 (7.4).** Вантаж  $Q$  падає з висоти  $h = 1$  м без початкової швидкості й ударяється об пружну горизонтальну балку в її середині; кінці балки закріплені. Написати рівняння подальшого руху вантажу, відносячи рух до осі, проведеної вертикально донизу з положення статичної рівноваги вантажу, якщо статичний прогин балки в її середині при вказаному навантаженні  $0,5$  см; масою балки нехтуємо.

*Розв'язання*



Швидкість вантажу в точці  $M_0$

$$V_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 100} = 443 \text{ см/с.}$$

Диференціальне рівняння руху вантажу:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{c}{m},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{Q}{\lambda_{\text{ст}}} \cdot \frac{g}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{980}{0,5}} = 44,3 \text{ с}^{-1},$$

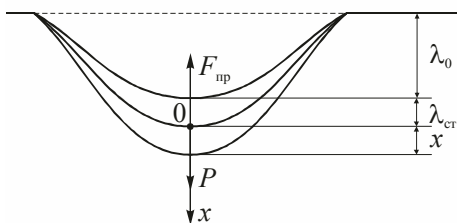
$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \text{ швидкість } \dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:  $t = 0$ ,  $x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -5$  см;  $V_0 = \dot{x} = 443$  м/с.

$$\text{Тоді } \begin{cases} -0,5 = C_1 \\ 443 = 44,3 \cdot C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -0,5, \\ C_2 = 10. \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = (-0,5 \cos 44,3t + 10 \sin 44,3t) \text{ см.}}}$$

**5 (7.5).** На кожну ресору вагона припадає навантаження  $P$  Н; під цим навантаженням ресора при рівновазі прогинається на 5 см. Визначити період  $T$  власних коливань вагона на ресорах. Пружний опір ресори пропорційний стрілі її прогину.



*Розв'язання*

Початкові умови:  $t = 0, x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -5 \text{ см}; V_0 = 0.$   
Закон руху ресори (див. задачу 1)

$$x = -5 \cos kt, \text{ де } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{980}{5}} = 14 \text{ с}^{-1};$$

$$\text{період коливань } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{14} = \underline{\underline{0,45 \text{ с.}}}$$

**6 (7.6).** Визначити період вільних коливань фундаменту машини, поставленого на пружний ґрунт, якщо маса фундаменту з машиною  $m = 90 \text{ т}$ , площа підшви фундаменту  $S = 15 \text{ м}^2$ , коефіцієнт жорсткості ґрунту  $c = \lambda S$ , де  $\lambda = 30 \text{ Н/см}^3$  – так звана питома жорсткість ґрунту.

*Розв'язання*

$$c = 30 \cdot 150000 = 4500000 \text{ Н/см} = 45 \cdot 10^7 \text{ Н/м};$$

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{90000 \cdot 9,8}{45 \cdot 10^7} = 0,00196 \text{ м} \approx 0,2 \text{ см}; k = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{980}{0,2}} = 70 \text{ с};$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{70} = \underline{\underline{0,09 \text{ с.}}}$$

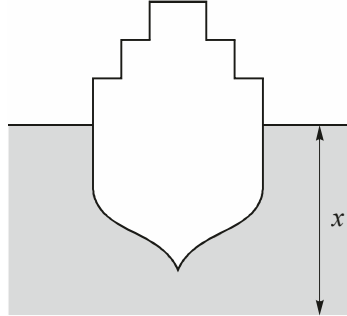
**7 (7.7).** Знайти період вільних вертикальних коливань корабля у спокійній воді, якщо маса корабля  $m$  т, площа його горизонтальної проекції  $S$  м<sup>2</sup>. Густина води  $\rho = 1$  т/м<sup>3</sup>. Силами, обумовленими в'язкістю води, нехтуємо.

*Розв'язання*

На корабель діє виштовхуюча сила  $F = S\rho g x$ . Тоді д.р. вертикального руху корабля  $m\ddot{x} + S\rho g x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + k^2 x = 0$ , де

$k = \sqrt{\frac{S\rho g}{m}}$ . Період коливань корабля

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{S\rho g}}$$



**8 (7.8).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху корабля, якщо він був спущений на воду з нульовою вертикальною швидкістю.

*Розв'язання*

Початкові умови:  $t = 0$ ,  $x_0 = -\lambda_{\text{ст}}$ ,  $V_0 = 0$ .

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

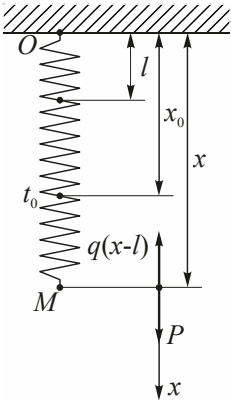
У положенні статичної рівноваги  $mg = S \cdot \lambda_{\text{ст}} \rho g \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{m}{S\rho}$ .

Використовуючи початкові умови, маємо систему:

$$\begin{cases} -\frac{m}{S\rho} = C_1 \\ 0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{m}{S\rho} \cos \sqrt{\frac{S\rho g}{m}} t \quad (\text{м}).$$

**9 (7.9).** Вантаж, вага якого дорівнює  $P$  Н, підвішений на пружній нитці до нерухомої точки. Виведений із положення рівноваги вантаж

починає коливатися. Виразити довжину нитки  $x$  як функцію часу і знайти, якій умові повинна задовольняти її початкова довжина  $x_0$ , щоб під час руху гирі нитка залишалася натягнутою. Натяг нитки пропорційний подовженню; довжина її в нерозтягнутому стані  $l$ ; від дії статичного навантаження, рівного  $q$  Н, нитка подовжується на 1 см. Початкова швидкість вантажу дорівнює нулю.



### Розв'язання

Диференціальне рівняння руху вантажу.

$$m\ddot{x} = mg - q(x - l)$$

або

$$\ddot{x} + \frac{q}{m}x = q + \frac{q}{m}l. \quad (1)$$

Загальний розв'язок цього неоднорідного д.р.  $x = x_1 + x_2$ , де  $x_1$  – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,  $x_2$  – який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Характеристичне рівняння  $r^2 + \frac{q}{m} = 0$ ,  $r = \pm \sqrt{\frac{q}{m}}i = \pm \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}i$ . Тоді

$$x_1 = C_1 \cos \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t.$$

Шукаємо частинний розв'язок у вигляді  $x_2 = A \Rightarrow \dot{x}_2 = 0$ ,  $\ddot{x}_2 = 0$ . Підставляємо  $x_2$  в (1):

$$\frac{q \cdot g}{P}A = q + \frac{q \cdot g}{P}l \Rightarrow A = \frac{P}{q} + l.$$

$$\text{Отже, } x = C_1 \cos \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t + \frac{P}{q} + l,$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} \left( -C_1 \sin \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t + C_2 \cos \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}}t \right).$$

Використовуємо початкові умови: при  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $V_0 = 0$ :

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + \frac{P}{q} + l \\ 0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 - \left(\frac{P}{q} + l\right) \\ C_2 = 0. \end{cases} \quad \text{Тоді } x = l + \frac{P}{q} + \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right) \cos \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} t.$$

Щоб нитка залишалася натягнутою, необхідно, щоб  $x_{\min} \geq l$ . Знайдемо екстремальні точки:  $\dot{x} = 0$  при

$$-\sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right) \sin \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} t = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} t = 0 \Rightarrow t_1 = 0.$$

$$\ddot{x} = -\sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} \left(x_0 - l - \frac{P}{q}\right) \cos \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} t,$$

$$\ddot{x}|_{t_1=0} = \sqrt{\frac{q \cdot g}{P}} \left(l + \frac{P}{q} - x_0\right) > 0 \Rightarrow x_{\min} = l + \frac{P}{q} + x_0 - l - \frac{P}{q} = x_0 \Rightarrow \underline{x_0 \geq l}.$$

$$\text{Також } \dot{x} = 0 \text{ при } t_2 = \sqrt{\frac{P}{q \cdot g}} \pi. \text{ Тоді } x_{\min} = 2l + \frac{2P}{q} - x_0, \quad 2l + \frac{2P}{q} -$$

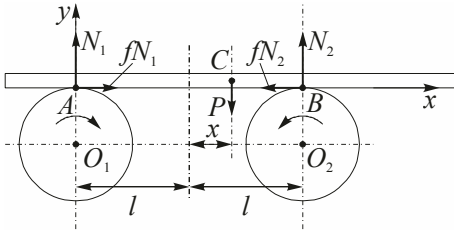
$$-x_0 \geq l \Rightarrow x_0 \leq l + \frac{2P}{q}.$$

$$\text{Отже, пружна нитка залишається розтягнутою при } \underline{l \leq x_0 \leq l + \frac{2P}{q}}.$$

**10 (7.10).** На два циліндричних шківів однакового радіуса покладено однорідний стержень. Шківів обертаються у протилежні сторони, як показано на рисунку. Центри шківів  $O_1$  і  $O_2$  знаходяться на горизонтальній прямій  $O_1O_2$ , віддаль  $O_1O_2 = 2l$ ; стержень приводиться у рух силами тертя, які виникають у точках дотику його зі шківів; ці сили пропорційні тиску стержня на шків, причому коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт тертя) дорівнює  $f$ .

1) Визначити рух стержня після того, як ми зсунемо його з положення симетрії на  $x_0$  при  $V_0 = 0$ .

2) Знайти коефіцієнт тертя  $f$ , знаючи, що період коливань  $T$  стержня при  $l = 25$  см дорівнює 2 с.



### Розв'язання

Оскільки стержень не пересувається вздовж осі  $y$ -ів, то

$$W_y = 0 \text{ і } \sum F_{ky} = 0:$$

$$\begin{cases} \sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} 2l \cdot N_2 = P(l+x), \\ 2l \cdot N_1 = P(l-x) \end{cases} \Rightarrow N_1 = \frac{P(l-x)}{2l}, \quad N_2 = \frac{P(l+x)}{2l}.$$

Диференціальне рівняння руху в проекції на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = fN_1 - fN_2 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{gf}{l}x = 0.$$

Нехай  $\frac{gf}{l} = k^2$ , тоді  $\begin{cases} x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \\ \dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \sin kt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1, \\ 0 = C_2 k. \end{cases}$

Отже,  $x = x_0 \cos \sqrt{\frac{gf}{l}}t$  (см).

$$T = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \sqrt{\frac{gf}{l}} = \frac{2\pi}{T} \text{ і } f = \frac{4\pi^2 l}{T^2 g} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 25}{4 \cdot 980} = \underline{\underline{0,25}}.$$

**11 (7.11).** До однієї і тої ж пружини підвісили спочатку вантаж вагою  $P$ , а іншим разом – вагою  $3P$ . Визначити, у скільки разів зміниться період коливань. Знаючи коефіцієнт жорсткості пружини  $c$ , а також по-

чаткові умови (вантажі підвішувалися до кінця нерозтягнутої пружини і відпускалися без початкової швидкості), знайти рівняння руху вантажів.

*Розв'язання*

Сила пружності  $F = c(x + \lambda_{\text{ст}})$ . У положенні  $M$  маємо:

$$m\ddot{x} = P - F = P - cx - c\lambda_{\text{ст}} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

$$\frac{c}{m} = k^2.$$

Тоді  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ ,  $\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$ .

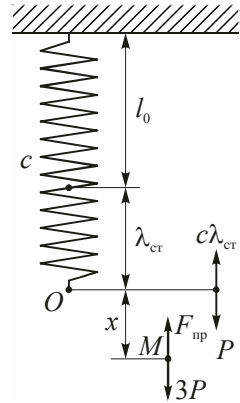
$$\text{При } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c}, \\ \dot{x}_0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{mg}{c} = C_1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } x = -\frac{mg}{c} \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t = -\frac{P}{c} \cos \sqrt{\frac{cg}{P}}t.$$

$$\text{Для вантажу } 3P \text{ одержуємо, що } x = -\frac{3P}{c} \cos \sqrt{\frac{cg}{3P}}t.$$

Періоди коливань першого і другого вантажів будуть відповідно:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \text{ і } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{c}}. \text{ Отже, } \frac{T_1}{T_2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}.$$



**12 (7.12).** До пружини жорсткістю  $c = 2$  кН/см спочатку підвісили вантаж масою 6 кг, а потім замінили його вантажем вдвічі більшою масою. Визначити частоту і період коливань вантажів.

*Розв'язання*

Згідно з розв'язком задачі 11 маємо:

$$k_1 = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{2000}{6}} = 18,26 \text{ рад/с};$$

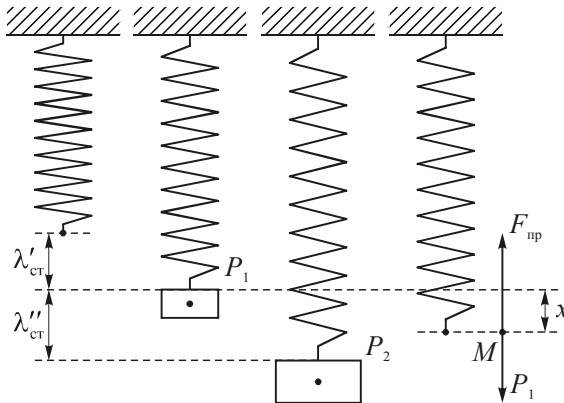
$$k_2 = \sqrt{\frac{c}{m_2}} = \sqrt{\frac{2000}{12}} = 12,91 \text{ рад/с};$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{K_1} = \frac{6,28}{18,26} = \underline{\underline{0,344 \text{ с}}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{K_2} = \frac{6,28}{12,91} = \underline{\underline{0,486 \text{ с}}}$$

**13 (7.13).** До пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $c = 19,6 \text{ Н/м}$ , було підвішено два вантажі з масами  $m_1 = 0,5 \text{ кг}$  і  $m_2 = 0,8 \text{ кг}$ . Система знаходилася в спокої в положенні статичної рівноваги, коли вантаж  $m_2$  прибрали. Знайти рівняння руху, частоту, кругову частоту і період коливань вантажу, що залишився.

*Розв'язання*



При  $t = 0$   $x_0 = \lambda''_{\text{cr}}$ ,  $V_0 = 0$

$$\lambda''_{\text{cr}} = \frac{P_2}{c} = \frac{m_2 g}{c} = \frac{0,8 \cdot 9,8}{19,6} = 0,4 \text{ м.}$$

Диференціальне рівняння руху вантажу  $m_1$ :

$$m_1 \ddot{x} + cx = 0; \quad k^2 = \frac{c}{m_1} = \frac{19,6}{0,5} = 39,2; \quad k = 6,26 \text{ рад/с.}$$

Тоді  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ ,  $\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$ .

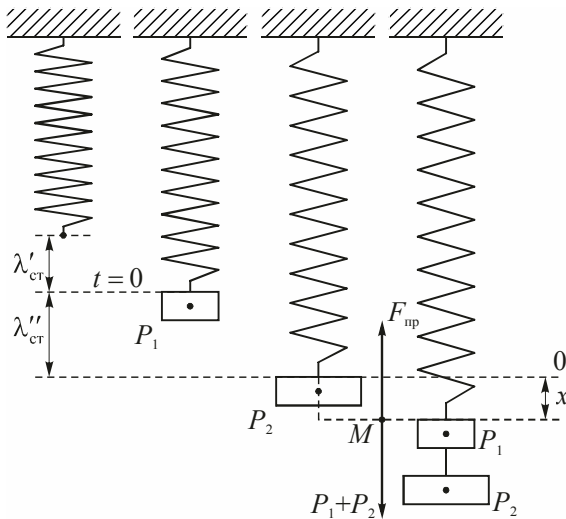
$$\text{При } t=0 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 = \lambda''_{\text{ст}} = 0,4 \text{ м,} \\ \dot{x} = V_0 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 40 = C_1, \\ 0 = kC_2. \end{cases} \quad x = \underline{\underline{0,4 \cos 6,26t.}}$$

Період коливань  $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,26}{6,26} = 1 \text{ с}$ ; кругова частота  $k = 2\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ;

$$\text{частота } f = \frac{k}{2\pi} = \underline{\underline{1 \text{ Гц.}}}$$

**14 (7.14).** Вантаж масою  $m_1 = 2 \text{ кг}$ , підвішений до пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $c = 98 \text{ Н/м}$ , знаходиться в рівновазі. У деякий момент до вантажу  $m_1$  додали вантаж  $m_2 = 0,8 \text{ кг}$ . Визначити рівняння руху і період коливань двох вантажів.

### Розв'язання



При  $t = 0$   $x_0 = -\lambda''_{\text{ст}}$ ,  $V_0 = 0$ .

$$\lambda''_{\text{ст}} = \frac{P_2}{c} = \frac{m_2 g}{c} = \frac{0,8 \cdot 9,8}{98} = 0,08 \text{ м.}$$

Диференціальне рівняння руху вантажів:

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad k^2 = \frac{c}{m} = \frac{98}{2 + 0,8} = 35, \quad k = 5,92 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Аналогічно до задачі **13** маємо:

$$x = \underline{\underline{-0,08 \cos 5,92t \text{ м.}}}$$

$$\text{Період коливань } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{5,92} = \underline{\underline{1,06 \text{ с.}}}$$

**15 (7.15).** Вантаж підвісили спочатку до пружини з жорсткістю  $c_1 = 2$  кН/м, а потім до пружини з жорсткістю  $c_2 = 4$  кН/м. Знайти відношення частот і відношення періодів коливань вантажів у цих двох випадках.

*Розв'язання*

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \sqrt{\frac{4000}{m}} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{0,5} = \underline{\underline{0,707}};$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{k_2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{2} = \underline{\underline{1,414}}.$$

**16 (7.16).** Тіло масою  $m$  знаходиться на похилій площині, яка складає кут  $\alpha$  з вертикаллю. До тіла прикріплена пружина, жорсткість якої  $c$ . Пружина паралельна похилій площині. Знайти рівняння руху тіла, якщо в початковий момент воно було прикріплене до кінця нерозтягнутої пружини і йому була надана початкова швидкість  $V_0$ , направлена до низу похилої площини. Початок координат взяти в положенні статичної рівноваги.

### Розв'язання

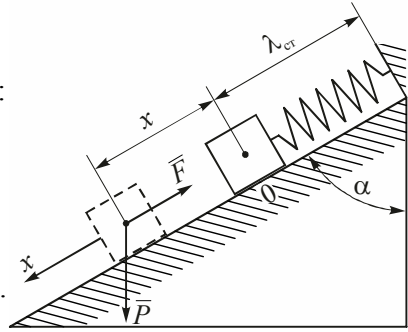
При  $t = 0$   $x_0 = -\lambda_{\text{ст}}$ ,  $\dot{x} = V_0$ .

Диференціальне рівняння руху тіла:

$$m\ddot{x} = P \cos \alpha - c(x + \lambda_{\text{ст}}).$$

У положенні статичної рівноваги:

$$P \cos \alpha = c\lambda_{\text{ст}} \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{P \cos \alpha}{c} = \frac{mg \cos \alpha}{c}.$$



Тоді  $m\ddot{x} + cx = 0$ ,  $k^2 = \frac{c}{m}$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

Загальний розв'язок д.р.:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} -\frac{mg \cos \alpha}{c} = C_1, \\ V_0 = C_2 k \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{k}.$$

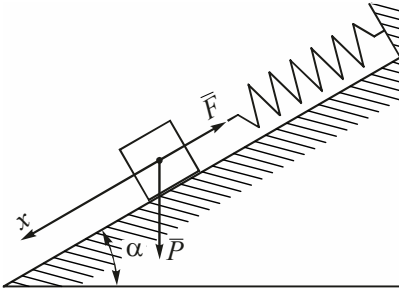
$$\text{Отже, } x = \frac{V_0}{k} \sin kt - \frac{mg \cos \alpha}{c} \cos kt.$$

**17 (7.17).** На гладкій площині, нахиленій до горизонту під кутом  $\alpha$ , знаходиться прикріплений до пружини вантаж вагою  $P$ . Статичне подовження пружини дорівнює  $f$ . Визначити коливання вантажу, якщо в початковий момент пружина була розтягнута з ненапруженого стану на довжину, рівну  $3f$ , і вантаж був відпущений без початкової швидкості.

### Розв'язання

Початок координат беремо в положенні статичної рівноваги:

$$c \cdot \lambda_{\text{ст}} = p \sin \alpha \Rightarrow c = \frac{p \sin \alpha}{\lambda_{\text{ст}}} = \frac{p \sin \alpha}{f}.$$



Аналогічно до задачі 16 кругова

$$\text{частота } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{p}} = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{f}},$$

закон руху

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

тоді

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} 2f = C_1, \\ 0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0 \text{ і } x = 2f \cos \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{f}} t.$$

**18 (7.18).** Тіло масою  $m = 12$  кг, прикріплене до кінця пружини, здійснює гармонічні коливання. За допомогою секундоміра встановлено, що тіло зробило 100 повних коливань за 45 с. Після цього до кінця пружини додатково прикріпили вантаж масою  $m_1 = 6$  кг. Визначити період коливань двох вантажів на пружині.

*Розв'язання*

Період коливань одного вантажу  $T = \frac{t}{N} = \frac{45}{100} = 0,45$  с. З іншого боку,

період коливань  $T = \frac{2\pi}{k}$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ . Період коливань обох вантажів  $T_1 =$

$$= \frac{2\pi}{k_1}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{c}{m+m_1}} \Rightarrow \frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{m+m_1}{m}} \quad \text{і} \quad T_1 = T \sqrt{\frac{m+m_1}{m}} = 0,45 \sqrt{\frac{18}{12}} = \underline{\underline{0,55}} \text{ с.}$$

**19 (7.19).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху одного вантажу масою  $m$  і двох вантажів масою  $m+m_1$ , якщо в обох випадках вантажі були підвішені до кінця нерозтягнутої пружини.

*Розв'язання*

Початкові умови:  $t = 0$ ,  $x_0 = -\lambda_{\text{ст}}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

$$1) \lambda_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}, k = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{0,45} = 14 \text{ с}^{-1}, c = k^2 m \quad \lambda_{\text{ст}} = \frac{g}{k^2} = \frac{980}{196} = 5 \text{ см.}$$

Закон руху одного тіла  $x = -5 \cos 14t$  см.

$$2) \lambda_{1 \text{ ст}} = \frac{(m + m_1)g}{c}, k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{6,28}{0,55} = 11,4 \text{ с}^{-1},$$

$$\lambda_{1 \text{ ст}} = k_1^2 (m + m_1) \Rightarrow \lambda_{1 \text{ ст}} = \frac{g}{k_1^2} = \frac{980}{129,26} = 7,54 \text{ см.}$$

Закон руху двох тіл  $x_1 = -7,54 \cos 11,4t$  см.

*Зауваження.* Значення  $x$  і  $x_1$  відраховуються відповідно від кожного з двох положень статичної рівноваги.

**20 (7.20).** Вантаж  $M$ , підвішений до нерухомої точки  $A$  на пружині, здійснює малі гармонічні коливання у вертикальній площині, ковзаючи без тертя по дузі кола, діаметр якого  $AB$  дорівнює  $l$ ; натуральна довжина пружини  $a$ ; жорсткість пружини така, що під дією сили, рівній вазі вантажу  $M$ , вона одержує подовження, рівне  $b$ . Визначити період  $T$  коливань у тому випадку, коли  $l = a + b$ ; масою пружини нехтуємо і вважаємо, що при коливаннях вона залишається розтягнутою.

#### Розв'язання

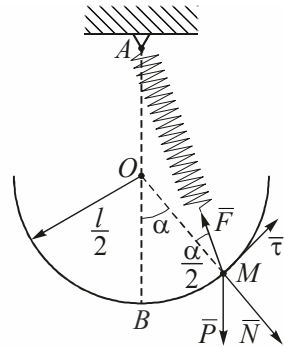
За другим законом Ньютона  $m\bar{w} = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N}$ . Спроєктувавши це рівняння на дотичну  $\tau$ , одержимо:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \alpha + F \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$AM = AB \cos \frac{\alpha}{2} = (a + b) \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = AM - a =$$

$$= (a + b) \cos \frac{\alpha}{2} - a, \quad F = c\lambda = \frac{mg}{b} \left[ (a + b) \cos \frac{\alpha}{2} - a \right] \approx mg, \quad \cos \frac{\alpha}{2} \approx 1, \text{ оскільки}$$

ки розглядаються малі коливання. З тої ж причини  $\sin \alpha = \alpha$  і  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ .

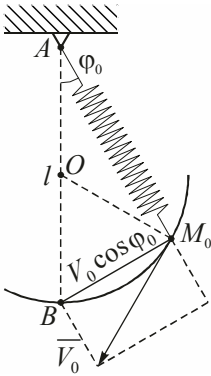


Тому рівняння (1) перетворюється до вигляду:

$$\frac{l\ddot{\alpha}}{2} = -\frac{g\alpha}{2} \quad \text{або} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0.$$

Звідси маємо, що період коливань  $T = \frac{2\pi}{k} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$ .

**21 (7.21).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху вантажу  $M$ , якщо у початковий момент кут  $\angle BAM_0 = \varphi_0$  і точці  $M_0$  надали початкову швидкість  $V_0$ , напрямлену по дотичній до кола вниз.



*Розв'язання*

Нехай  $\angle BAM = \varphi$ , тоді диференціальне рівняння, що описує малі коливання вантажу  $M$ , буде мати вигляд  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$  (див. розв'язок задачі **20**).

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad \text{де} \quad k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$\text{Для } t = 0: \angle BAM_0 = \varphi_0 \quad \text{і} \quad \dot{\varphi}_0 = -\frac{V_0 \cos \varphi_0}{AM_0} = -\frac{V_0}{l}.$$

Використовуючи ці початкові умови руху, одержимо:

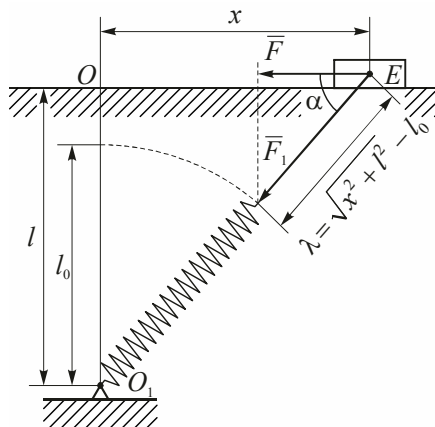
$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = -\frac{V_0}{\sqrt{gl}}. \quad \text{Отже,} \quad \underline{\underline{\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t - \frac{V_0}{\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t}}$$

**22 (7.22).** Тіло  $E$ , маса якого  $m$ , знаходиться на гладкій горизонтальній площині. До тіла прикріплена пружина жорсткістю  $c$ , другий кінець якої прикріплений до шарніра  $O_1$ . Довжина недеформованої пружини дорівнює  $l_0$ ; в положенні рівноваги тіла пружина має кінцевий попередній натяг, рівний  $F_0 = C(l - l_0)$ , де  $l = OO_1$ . Враховуючи у горизонтальній складовій пружної сили пружини лише лінійні члени відносно відхилень тіла від положення рівноваги, визначити період малих коливань тіла.

### Розв'язання

Деформація пружини при відхиленні тіла  $E$  від положення рівноваги на величину  $x$  буде  $\lambda = \sqrt{x^2 + l^2} - l_0$ , відповідна сила пружності пружини

$$\begin{aligned} F &= F_1 \cos \alpha = \\ &= c \left( \sqrt{x^2 + l^2} - l_0 \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} = \\ &= cx \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right). \end{aligned}$$



Розпишемо функцію  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}}$ . Розкладемо її в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + l^2}} = \frac{1}{l} - \frac{x^2}{2l^3} + \dots$$

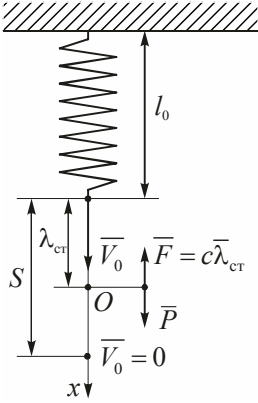
Якщо обмежитись лише першим членом розкладу, то

$$F = cx \left( 1 - \frac{l_0}{l} \right) = \frac{c(l - l_0)}{l} x = \frac{F_0 x}{l}. \text{ Тому } m\ddot{x} = -\frac{F_0 x}{l}, \ddot{x} + \frac{F_0 x}{ml} = 0, k^2 = \frac{F_0}{ml}$$

і період коливань  $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F_0}}$ .

**23 (7.23).** Матеріальна точка масою  $m$  підвішена до кінця нерозтягнутої пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c$  і відпущена з початковою швидкістю  $V_0$ , напрямленою вниз. Знайти рівняння руху і період коливань точки, якщо в момент часу, коли точка знаходиться у крайньому нижньому положенні, до неї прикладають силу  $Q = \text{const}$ , напрямлену вниз.

Початок координат вибрати в положенні статичної рівноваги, тобто на віддалі від кінця нерозтягнутої пружини.



### Розв'язання

За теоремою про зміну кінетичної енергії маємо:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = PS - \frac{cS^2}{2}; \quad S^2 - \frac{2P}{c}S - \frac{mV_0^2}{c} = 0.$$

$$S = \frac{P}{c} + \sqrt{\left(\frac{P}{c}\right)^2 + \frac{mV_0^2}{c}} = \frac{P}{c} + \sqrt{\left(\frac{V_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{P}{c}\right)^2}.$$

Диференціальне рівняння руху:

$$m\ddot{x} = -c(\lambda_{cr} + x) + P + Q = -cx + Q,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{Q}{m},$$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{Q}{mk^2}, \text{ тоді}$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + kC_2 \cos kt).$$

При  $t = 0$   $x_0 = S - \lambda_{cr}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

$$\begin{cases} S - \lambda_{cr} = C_1 + \frac{Q}{mk^2}, \\ 0 = C_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \sqrt{\left(\frac{V_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{P}{c}\right)^2} - \frac{Q}{x}, \quad C_2 = 0,$$

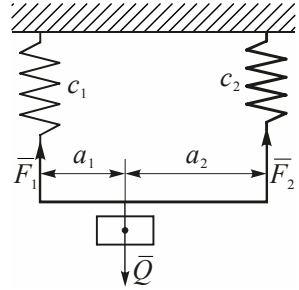
$$x = \left[ \sqrt{\left(\frac{V_0}{k}\right)^2 + \left(\frac{P}{c}\right)^2} \right] \cos \sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{Q}{c}.$$

**24 (7.24).** Визначити період вільних коливань вантажу масою  $m$ , прикріпленого до двох паралельно включених пружин, і коефіцієнт жорсткості пружини, еквівалентної даній подвійній пружині, якщо вантаж розташований так, що подовження обох пружин з коефіцієнтами жорсткості  $c_1$  і  $c_2$  однакові.

*Розв'язання*

У положенні статичної рівноваги  $Q = F_1 + F_2$ ,  $F_1 = c_1 \lambda'_{\text{ст}}$ ,  $F_2 = c_2 \lambda''_{\text{ст}}$ ,  $\lambda_{\text{ст}} = \lambda'_{\text{ст}} + \lambda''_{\text{ст}}$ .

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{F_1}{c_1} = \frac{F_2}{c_2} = \frac{F_1 + F_2}{c_1 + c_2} = \frac{Q}{c_1 + c_2}. \quad (1)$$



Замінімо дві паралельні пружини однією з коефіцієнтом жорсткості  $c$ , тоді:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}. \quad (2)$$

Порівнюючи (1) і (2), одержимо, що  $c = c_1 + c_2$ .

$$\text{Період коливань } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}.$$

**25 (7.25).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху вантажу, якщо його підвісили до нерозтягнутих пружин і надали початкової швидкості  $V_0$ , напрямленої вгору.

*Розв'язання*

$$\text{Початкові умови: } t = 0, \quad x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{Q}{x} = -\frac{Q}{C_1 + C_2}, \quad \dot{x} = -V_0.$$

Закон руху вантажу:

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt, \quad \text{де } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

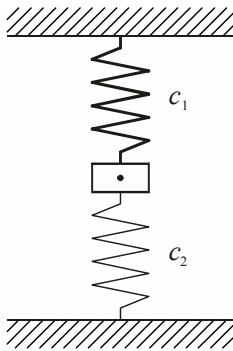
$$\dot{x} = k(-c_1 \sin kt + c_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} \frac{Q}{c_1 + c_2} = c_1 \\ -V_0 = kc_2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = -V_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}. \text{ Тоді}$$

$$x = -\frac{mg}{c_1 + c_2} \cos \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} t - V_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \sin \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} t.$$

**26 (7.26).** Визначити період вільних коливань вантажу масою  $m$ , застисненого між двома пружинами з різними коефіцієнтами жорсткості  $c_1$  і  $c_2$ .



*Розв'язання*

Верхня пружина розтягується під дією вантажу

$Q$  на величину  $\lambda'_{\text{ст}} = \frac{Q_1}{c_1}$ , нижня – на стільки ж стис-

кується, і  $\lambda''_{\text{ст}} = \frac{Q_2}{c_2}$ ,  $Q_1 + Q_2 = Q$ .

$$\lambda_{\text{ст}} = \lambda'_{\text{ст}} + \lambda''_{\text{ст}} = \frac{Q_1}{c_1} + \frac{Q_2}{c_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{c_1 + c_2} = \frac{Q}{c_1 + c_2}.$$

З іншого боку,  $\lambda_{\text{ст}} = \frac{Q}{c} \Rightarrow c = c_1 + c_2$ .

$$\text{Період вільних коливань } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}.$$

**27 (7.27).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння руху вантажу, якщо у положенні рівноваги йому надали швидкість  $V_0$ , напрямлену вниз.

*Розв'язання*

Початкові умови:  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0$ .

Згідно з розв'язком задачі 25 маємо

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ V_0 = C_2 \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} \Rightarrow C_2 = V_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}}. \end{cases}$$

$$\text{Тоді } x = V_0 \sqrt{\frac{m}{c_1 + c_2}} \sin \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}} t.$$

**28 (7.28).** Визначити коефіцієнт жорсткості  $c$  пружини, еквівалентної подвійній пружині, яка складається з двох послідовно включених пружин з різними коефіцієнтами жорсткості  $c_1$  і  $c_2$ . Вказати також період коливань вантажу масою  $m$ , підвішеного до вказаної подвійної пружини.

*Розв'язання*

$$\lambda'_{\text{ст}} = \frac{Q}{c_1}, \quad \lambda''_{\text{ст}} = \frac{Q}{c_2}.$$

$$\lambda_{\text{ст}} = \lambda'_{\text{ст}} + \lambda''_{\text{ст}} = \frac{Q(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}. \quad (1)$$

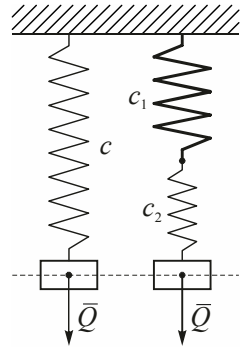
З іншого боку, для еквівалентної пружини:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}. \quad (2)$$

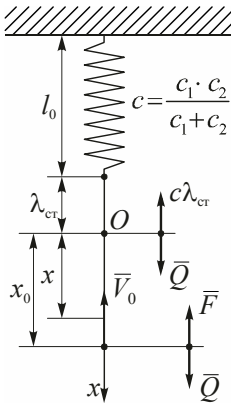
Порівнюючи (1) і (2), маємо:

$$c = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

$$\text{Період коливань } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}}.$$



**29 (7.29).** В умовах попередньої задачі знайти рівняння вантажу, якщо у початковий момент він знаходився на відстані  $x_0$  і йому надали швидкість  $V_0$ , напрямлену вгору.



*Розв'язання*

Диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = -F + Q = -c(\lambda_{cr} + x) + Q = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{c}{m}.$$

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Початкові умови:

$$t = 0, x = x_0, \dot{x} = -V_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1, \\ -V_0 = C_2 k \end{cases} \Rightarrow C_1 = x_0, C_2 = -\frac{V_0}{k}.$$

$$x = x_0 \cos kt - \frac{V_0}{k} \sin kt = x_0 \cos \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_2}{(c_1 + c_2)m}} t - V_0 \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)m}{c_1 \cdot c_2}} \sin \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_2}{(c_1 + c_2)m}} t.$$

**30 (7.30).** Визначити коефіцієнт жорсткості складеної пружини з двох послідовно з'єднаних пружин з різними коефіцієнтами жорсткості  $c_1 = 9,8$  Н/см і  $c_2 = 29,4$  Н/см. Знайти період коливань, амплітуду і рівняння руху вантажу масою 5 кг, підвішеного до вказаної складеної пружини, якщо у початковий момент вантаж було зміщено з положення статичної рівноваги на 5 см униз і йому була надана початкова швидкість 49 см/с, напрямлена також униз.

*Розв'язання*

Аналогічно до задач **28–29** коефіцієнт жорсткості еквівалентної

$$\text{пружини } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{9,8 \cdot 29,4}{39,2} = 7,35 \frac{\text{Н}}{\text{см}}.$$

Частота коливань  $k = \sqrt{\frac{c_1 c_2}{(c_1 + c_2)m}} = \sqrt{\frac{735}{5}} = 12,2 \text{ с}^{-1}$ .

Початкові умови:  $t = 0, x_0 = 5 \text{ см}, V_0 = \dot{x}_0 = 49 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ .

$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ , тоді

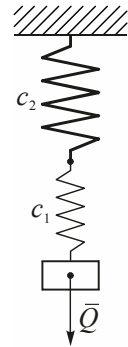
$\dot{x} = k(-c_1 \sin kt + c_2 \cos kt)$ .

$$\begin{cases} 5 = c_1 \\ 49 = 12,12c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = 4,04 \end{cases}$$

Отже, закон руху  $x = 5 \cos 12,12t + 4,04 \sin 12,12t$  (см).

Амплітуда коливань  $a = \sqrt{5^2 + 4,04^2} = 6,43$  (см).

Період коливань  $T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{12,12} = \underline{\underline{0,518}}$  (с).



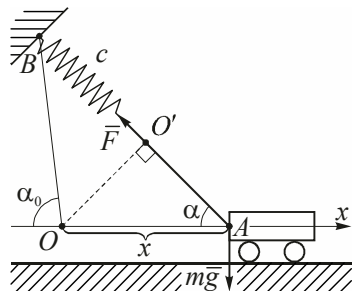
**31 (7.31).** Тіло  $A$  масою  $m$  може переміщатися вздовж горизонтальної прямої. До тіла прикріплена пружина, коефіцієнт жорсткості якої  $c$ . Другий кінець пружини закріплений у нерухомій точці  $B$ . При куті  $\alpha = \alpha_0$  пружина не деформована. Визначити частоту і період малих коливань тіла.

*Розв'язання*

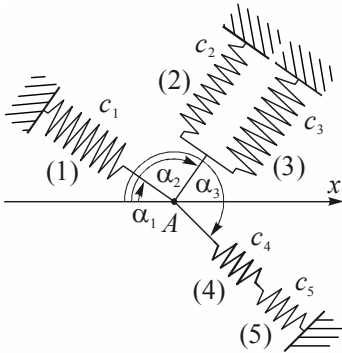
Нехай вантаж  $A$  зміститься вправо на відстань  $x$  від рівноважного положення. Тоді д.р. руху вантажу буде таким:  $m\ddot{x} = -F \cos \alpha$ , де  $F = c \cdot \Delta l$ ,  $\Delta l \approx AO' = x \cos \alpha$ . Вважаємо  $\alpha = \alpha_0$ , тоді д.р. руху вантажу буде таким:

$\ddot{x} + \frac{c \cdot \cos^2 \alpha_0}{m} x = 0$ , кругова частота

$k = \sqrt{\frac{c \cdot \cos^2 \alpha}{m}}$ , період коливань  $T = \frac{2\pi}{k} = \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{m}{c \cdot \cos^2 \alpha}}}}$ .



**32 (7.32).** Точка  $A$  масою  $m$  прикріплена пружинами, як показано на рисунку. У вихідному положенні точка знаходиться у рівновазі і всі пружини не напружені. Визначити коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини при малих коливаннях точки вздовж осі  $x$  в абсолютно гладких напрямних і частоту вільних коливань точки.



*Розв'язання*

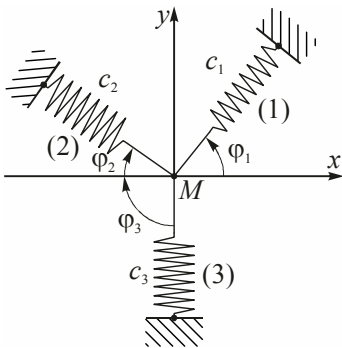
Згідно з задачею **31** пружина, яка напружена вздовж осі  $x$ , еквівалентна пружині (1) і має жорсткість  $c'_{\text{екв}} = c' \cos^2 \alpha_1$ . Аналогічно еквівалентні пружини (2) і (3) –

$$c''_{\text{екв}} = (c_2 + c_3) \cos^2(180^\circ - \alpha_2) = (c_2 + c_3) \cos^2 \alpha_2;$$

$$c'''_{\text{екв}} = \frac{c_4 \cdot c_5}{c_4 + c_5} \cos^2(180^\circ + \alpha_3) = \frac{c_4 \cdot c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3.$$

Тоді  $c = c_1 \cos^2 \alpha + (c_2 + c_3) \cos^2 \alpha_2 + \frac{c_4 \cdot c_5}{c_4 + c_5} \cos^2 \alpha_3$ ,  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

**33 (7.33).** Визначити коефіцієнт жорсткості пружини, еквівалентної трьом пружинам, показаним на рисунку, при коливаннях точки  $M$  в абсолютно гладких напрямних вздовж осі  $x$ . Розв'язати ту ж задачу, якщо напрямні розташовані вздовж осі  $y$ .



*Розв'язання*

Згідно з задачею **31** пружина, яка напружена вздовж осі  $x$ , еквівалентна пружині (1) і має жорсткість  $c_1 \cos^2 \varphi_1$ ; еквівалентна (2) –  $c_2 \cos^2(180^\circ + \varphi_2) = c_2 \cos^2 \varphi_2$ ; еквівалентна (3) –  $c_3 \cos^2(180^\circ + \varphi_3) = c_3 \cos^2 \varphi_3 = 0$ .

Таким чином, жорсткість пружини, еквівалентної трьом пружинам, при коливаннях точки  $M$  вздовж осі  $x$

дорівнює:

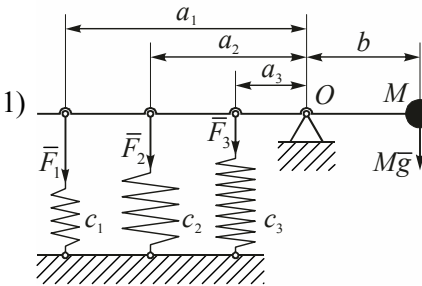
$$c_x = \underline{c_1 \cos^2 \varphi_1 + c_2 \cos^2 \varphi_2}.$$

Аналогічно знаходиться коефіцієнт жорсткості для осі  $y$ :

$$\begin{aligned} c_y &= c_1 \cos^2(90^\circ - \varphi_1) + c_2 \cos^2(270^\circ - \varphi_2) + c_3 \cos^2 180^\circ = \\ &= \underline{c_1 \sin^2 \varphi_1 + c_2 \sin^2 \varphi_2 + c_3}. \end{aligned}$$

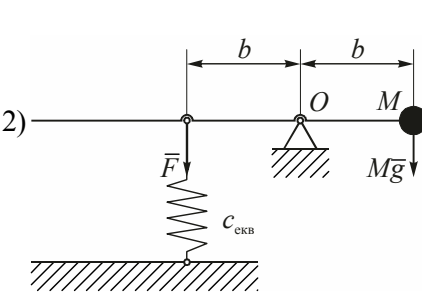
**34 (7.34).** Визначити коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, якщо вантаж  $M$  прикріплений до стержня, масою якого нехтуємо. Стержень шарнірно закріплений у точці  $O$  і прикріплений трьома вертикальними пружинами до фундаменту. Коефіцієнти жорсткості пружин  $c_1, c_2, c_3$ . Пружини прикріплені до стержня на відстанях  $a_1, a_2, a_3$  від шарніра. Вантаж  $M$  прикріплений до стержня на відстані  $b$  від шарніра. В положенні рівноваги стержень розташований горизонтально. Еквівалентна пружина кріпиться до стержня на відстані  $b$  від шарніра.

*Розв'язання*



Із положення 3 система переходить в положення 1 і при цьому кожна пружина відповідно скорочується на  $x_1, x_2$  і  $x_3$ . Для положення 3 справедлива рівність:

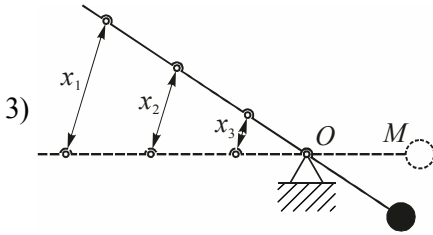
$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = k_0. \text{ Для положення 1 і 2}$$



$$\begin{cases} \sum m_0(\bar{F}_i) = 0 \Rightarrow \{F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 = Mgb, \\ Fb = Mgb. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 x_1 a_1 + c_2 a_2 k_0 = Mgb, \\ c_{\text{екв}} x b = Mgb. \end{cases}$$

$$x = k_0 b$$

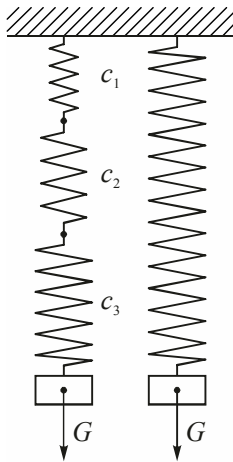


$$\begin{cases} c_1 a_1^2 k_0 + c_2 a_2^2 k_0 + c_3 a_3^2 k_0 = Mgb, \\ c_{\text{екв}} b^2 k_0 = Mgb. \end{cases} \Rightarrow$$

$$(c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2) k_0 = c_{\text{екв}} b^2 k_0 \Rightarrow$$

$$c = c_{\text{екв}} = \frac{c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + c_3 a_3^2}{b^2}.$$

**35 (7.35).** Гвинтова пружина складається із  $n$  ділянок, коефіцієнт жорсткості яких  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Визначити коефіцієнт жорсткості  $c$  однорідної пружини, еквівалентної до даної, а також період коливань точки, маса якої дорівнює  $m$ .



*Розв'язання*

Загальне подовження всіх пружин:

$$\lambda = \lambda_{1 \text{ ст}} + \lambda_{2 \text{ ст}} + \dots + \lambda_{n \text{ ст}} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} + \dots + \frac{G}{c_n}. \quad (1)$$

З іншого боку, для еквівалентної пружини:

$$\lambda = \frac{G}{c}. \quad (2)$$

Із рівнянь (1) і (2) випливає, що

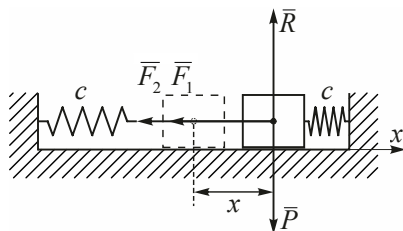
$$\frac{G}{c} = \frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} + \dots + \frac{G}{c_n} \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}}}}.$$

**36 (7.36).** Вантаж масою 10 кг лежить на абсолютно гладкій поверхні і зажатий між двома пружинами однакової жорсткості  $c = 19,6 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ .

У деякий момент часу вантаж було зсунуто на 4 см від положення рівноваги вправо і відпущено без початкової швидкості. Знайти рівняння руху, період коливань і максимальну швидкість вантажу.

### Розв'язання

Зобразимо вантаж у проміжному положенні, зміщеному по відношенню до початку відліку на  $x$ , і нехай він рухається в сторону зростання  $x$ . Диференціальне рівняння руху:



$$m\bar{w} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{P} + \bar{R}. \quad (1)$$

Спроекуємо (1) на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = -cx - cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2c}{m}x = 0; \quad c = 19,6 \frac{\text{Н}}{\text{см}} = 1960 \frac{\text{Н}}{\text{м}};$$

$$k = \sqrt{\frac{2c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1960}{10}} = 19,8 \text{ с}^{-1} \Rightarrow x = c_1 \cos 19,8t + c_2 \sin 19,8t,$$

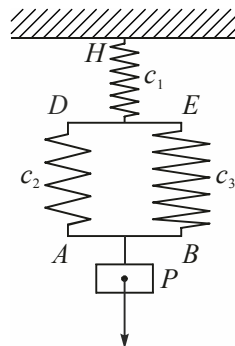
$$\dot{x} = 19,8(-c_1 \sin 19,8t + c_2 \cos 19,8t).$$

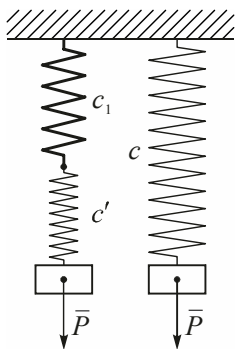
Використовуємо початкові умови:

$$t = 0, \quad x_0 = 4 \text{ см}; \quad \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 = c_1 \\ 0 = 19,8c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \cos 19,8t, \\ \dot{x}_{\max} = 4 \cdot 19,8 = \\ = \underline{\underline{79,2}} \frac{\text{см}}{\text{с}}. \end{matrix}$$

$$\text{Період коливань } T = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{19,8} = \underline{\underline{0,317}} \text{ с}.$$

**37 (7.37).** Вантаж  $P$  масою  $m$  підвішений до стержня  $AB$ , який з'єднаний двома пружинами з коефіцієнтами жорсткості  $c_2$  і  $c_3$ , зі стержнем  $DE$ . Останній прикріплений до стелі у точці  $H$  пружиною з коефіцієнтом жорсткості  $c_1$ . При коливаннях стержні  $AB$  і  $DE$  залишаються горизонтальними. Визначити коефіцієнт жорсткості однієї еквівалентної пружини, при якій вантаж  $P$  буде коливатися з тією ж частотою. Знайти період вільних коливань вантажу. Масою стержня нехтуємо.





### Розв'язання

Згідно з задачею **24** пружини  $c_2$  і  $c_3$  еквівалентні одній з жорсткістю  $c' = c_2 + c_3$ .

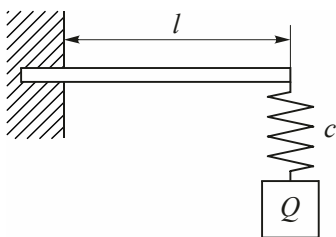
Згідно з задачею **28**  $c_1$  і  $c'$  еквівалентні одній пружині з жорсткістю  $c = \frac{c_1 \cdot c'}{c_1 + c'} = \frac{c_1(c_2 + c_3)}{c_1 + c_2 + c_3}$ .

Період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(c_1 + c_2 + c_3)}{c_1(c_2 + c_3)}}$$

**38 (7.38).** Визначити власну частоту коливань вантажу  $Q$  масою  $m$ , який підвішений на кінці пружної консолі довжиною  $l$ . Пружина, що утримує вантаж, має жорсткість  $c$ . Жорсткість на кінці консолі визначається

формулою  $c_1 = 3E \frac{I}{l^3}$  ( $E$  – модуль пружності,  $I$  – момент інерції). Масою консолі нехтуємо.



### Розв'язання

Консоль і пружину можна розглядати як дві послідовно з'єднані пружини з жорсткостями  $c_1$  і  $c$ , і тоді жорсткість еквівалентної пружини (згідно з задачею **28**)

$$c_{\text{екв}} = \frac{c_1 \cdot c}{c_1 + c} = \frac{3EIc}{3EI + cl^3}$$

Власна частота

$$k = \sqrt{\frac{c_{\text{екв}}}{m}} = \sqrt{\frac{3EIc}{m(3EI + cl^3)}}$$

**39 (7.39).** Коливання вантажу масою  $M = 10$  кг, що лежить на середині балки жорсткістю  $c = 20 \frac{\text{Н}}{\text{см}}$ , відбуваються з амплітудою 2 см. Ви-

значити величину початкової швидкості вантажу, якщо у момент  $t = 0$  вантаж знаходився в положенні статичної рівноваги.

*Розв'язання*

Закон вільних коливань вантажу  $x = a \sin(kt + \alpha)$ .

Початкові умови:  $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = V_0. \dot{x} = ak \cos kt$ .

Використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} 0 = a \sin \alpha, \\ V_0 = ak \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0, \\ V_0 = ak = a \sqrt{\frac{c}{m}} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 980}{10}} = \underline{\underline{28 \frac{\text{см}}{\text{с}}}}$$

**40 (7.40).** Вантаж  $Q$  масою  $m$  закріплено горизонтально натягнутим тросом  $AB = l$ . При малих коливаннях вантажу натяг троса  $S$  можна вважати постійним. Визначити частоту вільних коливань вантажу, якщо відстань вантажу від кінця троса  $A$  дорівнює  $a$ .

*Розв'язання*

$AB = l, S = \text{const.}$

Для положення **б** справедливі рівності:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

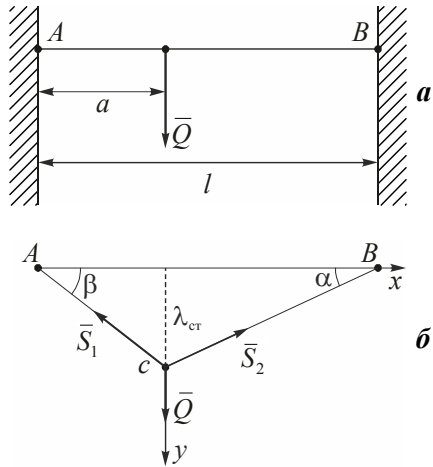
$$\begin{cases} -S_1 \cos \beta + S_2 \cos \alpha = 0, \\ Q - S_1 \sin \beta - S_2 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Оскільки прогини малі, то  $\cos \alpha = \cos \beta \approx 1 \Rightarrow S_1 \approx S_2 = S,$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{BC} \approx \frac{\lambda_{\text{ст}}}{l-a}; \quad \sin \beta = \frac{\lambda_{\text{ст}}}{AC} \approx \frac{\lambda_{\text{ст}}}{a}.$$

Із другої рівності системи маємо:

$$S = \frac{Q}{-\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{Qa \cdot (l-a)}{\lambda_{\text{ст}} \cdot l} \Rightarrow \lambda_{\text{ст}} = \frac{Qa \cdot (l-a)}{l \cdot S}.$$



### Частота вільних коливань

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{Q \cdot g}{\lambda_{\text{ст}} \cdot Q}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{Sgl}{Qa \cdot (l-a)}} = \sqrt{\frac{Sl}{ma \cdot (l-a)}}.$$

**41 (7.41).** Вантаж вагою 490,5 Н лежить посередині балки  $AB$ . Момент інерції поперечного перерізу балки  $I = 80 \text{ см}^4$ . Визначити довжину балки  $l$  при умові, що період вільних коливань вантажу на балці  $T = 1 \text{ с}$ .



*Розв'язання*

Частота  $k = \frac{2\pi}{T}$  або  $k = \sqrt{\frac{c}{m}} =$

$$= \sqrt{\frac{gp}{p \cdot \lambda_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{f}}, \text{ де } f \text{ – статичний прогин балки, який визначається}$$

формулою  $f = \frac{pl^3}{48EI}$ ,  $E = 2,05 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}$ .

Отже:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{f} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{48EIg}{pl^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{48EIgT^2}{4\pi^2 p}} = \sqrt[3]{\frac{48 \cdot 2,05 \cdot 10^{11} \cdot 9,8 \cdot 80 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 9,87 \cdot 490,5}} = \underline{\underline{15,9 \text{ м}}}.$$

**42 (7.42).** Вантаж  $Q$  масою  $m$  лежить між двома вертикальними пружинами з коефіцієнтом жорсткості  $c_1$  і  $c_2$ . Верхній кінець першої пружини закріплено нерухомо, а нижній кінець другої пружини прикріплений до середини балки. Визначити довжину балки  $l$  так, щоб період коливань вантажу дорівнював  $T$ . Момент інерції поперечного перерізу балки  $I$ , модуль пружності  $E$ .

*Розв'язання*

Коефіцієнт жорсткості балки  $AB$  згідно з задачею 41:

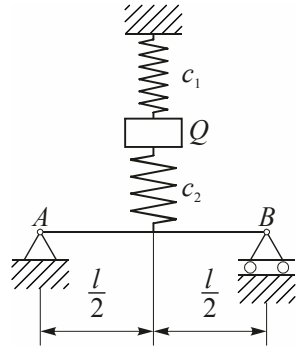
$$c' = \frac{Q}{f} = \frac{48EI}{l^3}.$$

Балка і пружина  $c_2$  еквівалентні пружині з коефіцієнтом жорсткості:

$$c'' = \frac{c' \cdot c_2}{c' + c_2} = \frac{48EI}{l^3} c_2.$$

Пружини з жорсткостями  $c'$  і  $c_1$  еквівалентні одній пружині з жорсткістю (див. 26):

$$c = c'' + c_1 = \frac{48EI}{l^3} c_2 + c_1.$$



Період коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{gc}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{Q}{gc} = 4\pi^2 \frac{Q}{g} \cdot \frac{48EI + c_2 l^3}{48EI(c_1 + c_2)c_1 c_2 l^3} \Rightarrow$$

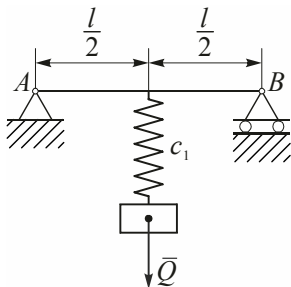
$$\Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{48EI(c_1 + c_2) - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{Q}{g}}{c_2 \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{Q}{g} - c_1 \right)}} = \sqrt[3]{\frac{4EI \left( c_1 + c_2 - \frac{4\pi^2}{T^2} m \right)}{c_2 \left( \frac{4\pi^2}{T^2} m - c_1 \right)}}.$$

**43 (7.43).** Знайти рівняння руху і період коливань вантажу  $Q$  масою  $m$ , підвішеного до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c_1$ , якщо пружина прикріплена до середини балки довжиною  $l$ . Жорсткість балки на згин  $EI$ . В початковий момент вантаж знаходився у положенні статичної рівноваги і йому була задана швидкість  $V_0$ , напрямлена вниз.

*Розв'язання*

Згідно з задачею 42 коефіцієнт жорсткості балки  $AB$  дорівнює

$c' = \frac{48EI}{l^3}$ . Коефіцієнт жорсткості пружини, яка еквівалентна балці і пружині, дорівнює  $c = \frac{c' \cdot c_1}{c' + c_1} = \frac{48EIc_1}{48EI + c_1 l^3}$ .



Закон руху вантажу:  $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ ,

$$\text{де } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{48EIc_1}{(c_1l^3 + 48EI)m}}.$$

Знаходимо  $\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt)$ .

Використовуючи початкові умови:  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0$ , одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \\ V_0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = \frac{V_0}{k} = V_0 \sqrt{\frac{(c_1l^3 + 48EI)m}{48EIc_1}}.$$

Таким чином, 
$$x = V_0 \sqrt{\frac{m(48EI + c_1l^3)}{48EIc_1}} \sin \sqrt{\frac{48EIc_1}{(c_1l^3 + 48EI)m}} t,$$

період коливань вантажу 
$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{(c_1l^3 + 48EI)m}{48EIc_1}}.$$

**44 (7.44).** Вантаж вагою  $Q$  затиснений між двома вертикальними пружинами, жорсткість яких дорівнює  $c_1$  і  $c_2$ . Верхній кінець першої пружини закріплений нерухомо. Нижній кінець другої пружини прикріплений до вільного кінця балки, закріпленої другим кінцем у стіну. Відомо, що вільний кінець закріпленої балки під дією сили  $P$ , прикладеної до вільного кінця балки, дає прогин  $f = \frac{pl^3}{3EI}$ , де  $EI$  – задана жорсткість балки при прогині. Визначити довжину  $l$ , при якій вантаж буде коливатися з даним періодом  $T$ . Знайти рівняння руху вантажу, якщо у початковий момент він був підвішений до кінців нерозтягнутої пружини і відпущений без початкової швидкості.

*Розв'язання*

Коефіцієнт жорсткості балки згідно з задачею 41:

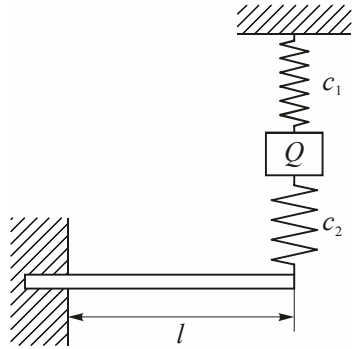
$$c' = \frac{Q}{f} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Балка і пружина  $c_2$  еквівалентні пружині з коефіцієнтом жорсткості (див. **28**):

$$c'' = \frac{c' \cdot c_2}{c' + c_2} = \frac{\frac{3EI}{l^3} \cdot c_2}{\frac{3EI}{l^3} + c_2}.$$

Коефіцієнт жорсткості  $c$  пружини, еквівалентної системі з  $c_1$  і  $c''$  (див. **26**),

$$c = c_1 + c'' = \frac{\frac{3EI}{l^3} \cdot c_2}{\frac{3EI}{l^3} + c_2} + c_1.$$



Аналогічно до задачі **42** маємо, що

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{Q}{gc} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{3EI \left( c_1 + c_2 - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{Q}{g} \right)}{c_2 \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{Q}{g} - c_1 \right)}}.$$

При  $t = 0$   $x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{Q}{c} = -Q \frac{3EI + c_2 l^3}{c_1 c_2 + (c_1 + c_2) \cdot 3EI}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

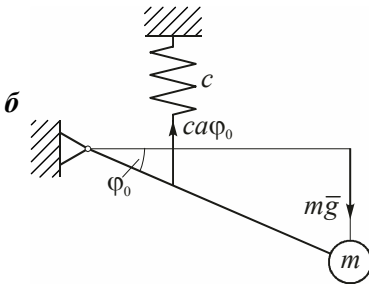
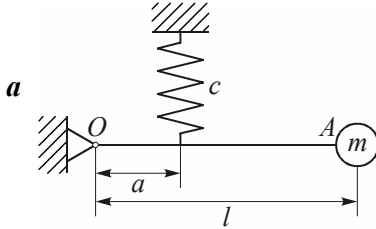
Тоді

$$x = -\lambda_{\text{ст}} \cos kt, \quad \text{де} \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{(c_1 c_2 + (c_1 + c_2) 3EI) g}{(c_2 l^3 + 3EI) Q}}.$$

Підставляючи  $x$  і  $\lambda_{\text{ст}}$  у рівняння руху вантажу, одержуємо:

$$x = -Q \frac{c_2 l^3 + 3EI}{c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2) \cdot 3EI} \cos \sqrt{\frac{(c_1 c_2 l^3 + (c_1 + c_2) \cdot 3EI) \cdot g}{(c_2 l^3 + 3EI) \cdot Q}} \cdot t.$$

**45 (7.45).** Стержень  $OA$  довжиною  $l$ , на кінці якого лежить вантаж масою  $m$ , може повертатися навколо осі  $O$ . На відстані  $a$  від осі  $O$  до стержня прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$ . Визначити власну частоту коливань вантажу, якщо стержень  $OA$  в положенні рівноваги займає горизонтальне положення. Масою стержня нехтуємо.



*Розв'язання*

Нехай у положенні рівноваги кут відхилення початково горизонтальної балки дорівнює  $\varphi_0$ . На балку діє сила ваги вантажу  $mg$  і реакція пружини  $ca\varphi_0$ .

$$\text{Рівняння рівноваги: } \sum m_0(\overline{F}_k) = 0$$

або

$$mgl - ca^2\varphi_0 = 0. \quad (1)$$

Нехай балка, виходячи з положення рівноваги, відхиляється на додатковий кут  $\varphi$ . Тоді повний кут відхилення дорівнює  $\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi$  і повна реакція пружини дорівнює  $ca \cdot (\varphi_0 + \varphi)$ .

Складаємо д.р. руху вантажу і балки:

$$I\ddot{\varphi}_1 = \sum m_0(\overline{F}_k),$$

$$I \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0 + \varphi) = mgl - ca^2(\varphi_0 + \varphi).$$

Оскільки момент інерції вантажу  $I = ml^2$ ,  $\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_0 + \varphi) = \ddot{\varphi}$ , то,

з урахуванням (1), маємо:

$$ml^2\ddot{\varphi} + ca^2\varphi = 0 \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \frac{c}{m} \cdot \frac{a^2}{l^2} \varphi = 0.$$

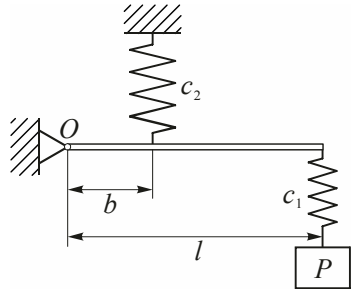
Отже, власна частота коливань вантажу

$$k = \sqrt{\frac{c}{m} \cdot \frac{a^2}{l}} = \frac{a}{l} \sqrt{\frac{c}{m}} c^{-1}.$$

**46 (7.46).** Вантаж  $P$  масою  $m$  підвішений на пружині до кінця стержня довжиною  $l$ , який може обертатися навколо осі  $O$ . Коефіцієнт жорсткості пружини  $c_1$ . Пружина, що підтримує стержень, встановлена на відстані  $b$  від точки  $O$  і має коефіцієнт жорсткості  $c_2$ . Визначити власну частоту коливань вантажу  $P$ . Масою стержня нехтуємо.

*Розв'язання*

Якби не було пружини  $c_1$ , то частота власних коливань вантажу  $P$  згідно з задачею 45 дорівнювала б  $k = \sqrt{\frac{b^2 c_2}{l^2 m}}$ .



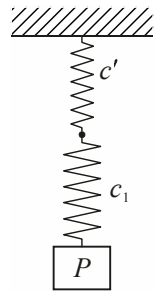
Порівняємо з  $k = \sqrt{\frac{c'}{m}}$  — формулою для

частоти коливань вантажу масою  $m$ , підвішеного на пружині з жорсткістю  $c'$ . Значить, пружину  $c_2$  і балку з вантажем можна замінити однією пружиною

з коефіцієнтом жорсткості  $c' = \frac{b^2}{l^2} c_2$ .

Замінімо дві пружини з жорсткостями  $c'$  і  $c_1$  однією з жорсткістю, що дорівнює (див. 28)

$$c = \frac{c' \cdot c_1}{c' + c_1} = \frac{\frac{b^2}{l^2} c_1 c_2}{c_1 + \frac{b^2}{l^2} c_2} = \frac{c_1 c_2}{c_2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 c_1}.$$



Тоді частота власних коливань

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g c_1 c_2}{P \left( c_2 + \left(\frac{l}{b}\right) c_1 \right)}}.$$

**47 (7.47).** Для визначення прискорення сили тяжіння у даному місці земної кулі проводять два досліди. До кінця пружини підвішують вантаж  $P_1$  і вимірюють статичне подовження пружини  $l_1$ . Потім до кінця цієї ж пружини підвішують інший вантаж  $P_2$  і знову вимірюють статичне подовження  $l_2$ . Після цього повторюють обидва досліди, заставляючи по черзі робити коливання, і вимірюють при цьому періоди коливань  $T_1$  і  $T_2$ . Другий дослід роблять для того, щоб врахувати вплив маси самої пружини, вважаючи, що при русі вантажу цей вплив еквівалентний додаванню до маси, що коливається, додаткової маси. Знайти формулу для визначення прискорення сили тяжіння за цими дослідними даними.

*Розв'язання*

У положенні статичної рівноваги:

$$P_1 = cl_1 = m_1g,$$

$$P_2 = cl_2 = m_2g.$$

Періоди коливань в обох випадках:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_{\text{пруж}}}{c}} \Rightarrow m_{\text{пруж}} = \frac{T_1^2 c}{4\pi^2} - m_1. \quad (1)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2 + m_{\text{пруж}}}{c}} \Rightarrow m_{\text{пруж}} = \frac{T_2^2}{4\pi^2} - m_2. \quad (2)$$

Прирівнюючи праві частини (1) і (2), одержуємо

$$\frac{(T_1^2 - T_2^2)}{4\pi^2} = m_1 - m_2 = \frac{c \cdot (l_1 - l_2)}{g} \Rightarrow \underline{\underline{g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}}}.$$

**48 (7.48).** По горизонтальній хорді (пазу) вертикально розташовано-го круга без тертя точка  $M$  масою 2 кг під дією сили тяжіння  $\vec{F}$ , пропорційній за величиною відстані від центра  $O$ , причому коефіцієнт пропорційності 98 Н/м. Відстань від центра до хорди дорівнює 20 см, радіус кола 40 см. Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент вона знаходилася у правому крайньому положенні  $M_0$  і відпущена без початкової швидкості. З якою швидкістю точка проходить через середину хорди?

*Розв'язання*

Згідно з умовою  $F = kr = 0,1r$ , де  $r = MO$ ,

$$m\bar{w} = \bar{P} + \bar{R} + \bar{F}. \quad (1)$$

Проектуємо (1) на вісь  $x$ :

$$m\ddot{x} = -F \cos \alpha,$$

$$m\ddot{x} = -0,1x, \quad \ddot{x} + k^2x = 0, \text{ де}$$

$$k^2 = \frac{0,1}{m} = \frac{0,1 \cdot 980}{2} = 49.$$

Загальний розв'язок д.р.:

$$x = C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t \Rightarrow$$

$$\dot{x} = 7(C_1 \sin 7t + C_2 \cos 7t).$$

Початкові умови:  $t = 0, x_0 = OM_0 = \sqrt{40^2 - 20^0} = 34,6 \text{ см}, V_0 = 0$ .

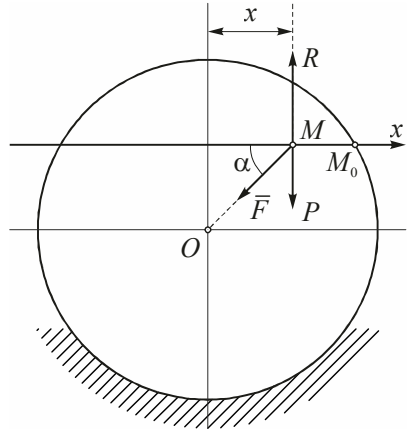
$$\begin{cases} 34,6 = C_1, \\ 0 = 7C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 34,6 \cos 7t \text{ (см)}, \\ V = \dot{x} = -7 \cdot 34,6 \sin 7t. \end{cases}$$

У момент проходження через точку  $O$   $x = 0$ , тоді

$$\cos 7t = 0 \text{ і } 7t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots),$$

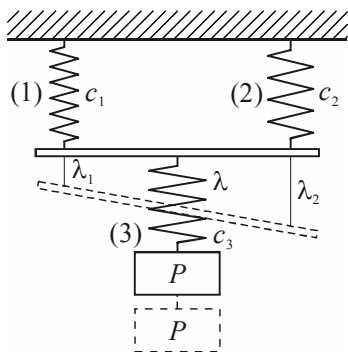
$$\sin 7t = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1,$$

$$|\dot{x}|_{x=0} = 7 \cdot 34,6 = 242 \text{ см/с}; \quad \underline{\underline{\dot{x} = V = \pm 242 \text{ см/с}}}.$$



**49 (7.49).** До невагомого стержня  $AB$  прикріплені три пружини. Дві, з жорсткостями  $c_1$  і  $c_2$ , утримують стержень і розташовані на його кінцях.

Третя пружина, жорсткість якої  $c_3$ , прикріплена до середини стержня і несе вантаж  $P$  масою  $m$ . Визначити власну частоту коливань вантажу.



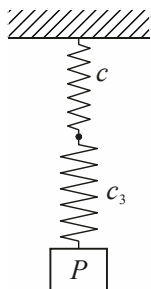
### Розв'язання

Статичні подовження 1-ої і 2-ої пружин відповідно дорівнюють

$$\lambda_1 = \frac{P}{2c_1}, \quad \lambda_2 = \frac{P}{2c_2}.$$

Замінімо (1) і (2) однією пружиною, їм еквівалентною. Як видно з рисунка, її подовження знаходиться як довжина середньої лінії трапеції:

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{P}{4} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_1 \cdot c_2}.$$



Замінімо цю еквівалентну пружину і пружину (3) їм еквівалентною. Коефіцієнт жорсткості пружини, еквівалентної (1), (2) і (3), згідно з задачею 28 дорівнює:

$$c_{\text{екв}} = \frac{c \cdot c_3}{c_3 + c} = \frac{\frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2} \cdot c_3}{\frac{4c_1c_2}{c_1 + c_2} + c_3} = \frac{4c_1c_2c_3}{4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}.$$

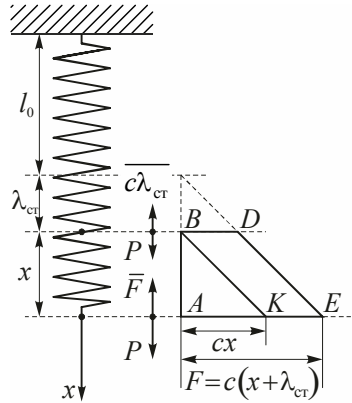
Власна частота коливань вантажу:

$$k = \sqrt{\frac{c_{\text{екв}}}{m}} = \sqrt{\frac{4c_1c_2c_3}{m \cdot (4c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)}} c^{-1}.$$

**50 (7.50).** Вантаж масою 50 кг, прикріплений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 1,96$  кН/м, здійснює коливання. Визначити повну механічну енергію вантажу і пружини, нехтуючи масою пружини, побудувати графік залежності пружної сили від переміщення і показати на ньому потенціальну енергію пружини. Прийняти положення статичної рівноваги за початок відліку потенціальної енергії.

### Розв'язання

Відлік потенціальної енергії вантажу будемо вести від положення статичної рівноваги, для якого  $P = c\lambda_{\text{ст}}$ , де  $P$  – вага вантажу. Потенціальна енергія вантажу в положенні, що визначається координатою  $x$ , дорівнює роботі, виконаній силами  $\bar{F}$  і  $\bar{P}$  при переході вантажу із цього положення в точку  $O$  ( $\bar{F}$  – сила пружності пружини). Робота сили  $\bar{F}$  визначається площею

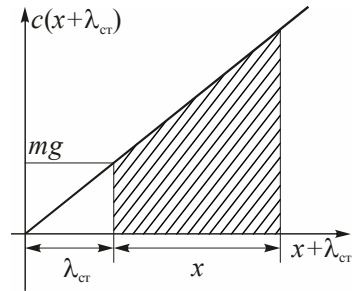


трапеції  $ABDE$ . Робота сили  $\bar{F}$  (додатна або від'ємна) визначається площею паралелограма  $BDEK$ , а тому потенціальна енергія вантажу визначається площею  $\Delta BDK$ . Отже,

$$\Pi = \frac{cx^2}{2}.$$

Кінетична енергія вантажу в цьому ж положенні:

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}.$$



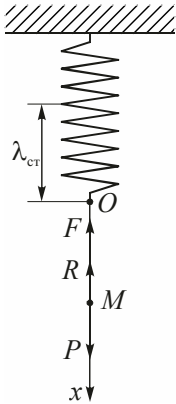
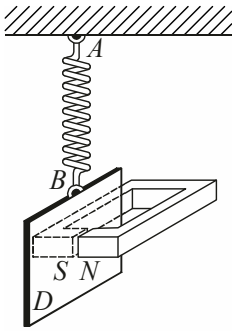
Повна механічна енергія вантажу:

$$W = \Pi + T = \frac{cx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} = (980x^2 + 5\dot{x}^2) \text{ Дж.}$$

Заштрихована на рисунку площа дорівнює потенціальній енергії пружини.

## 2. Вплив опору на вільні коливання

**51 (7.51).** Пластина  $D$  масою 100 г підвішена на пружині  $AB$  у нерухомій точці  $A$ , рухається між полюсами магніту. Завдяки вихровим токам рух гальмується силою, пропорційною швидкості. Сила опору руху дорівнює  $k\nu\Phi^2H$ , де  $k = 0,001$ ,  $\nu$  – швидкість в м/с,  $\Phi$  – магнітний потік між полюсами  $N$  і  $S$ . В початковий момент швидкість пластини дорівнює нулю і пружина не розтягнута. Подовження її на 1 м відбувається при статичній дії сили в 19,6 Н, яка прикладена у точці  $B$ . Визначити рух пластини в тому випадку, коли  $\Phi = 10\sqrt{5}$  Вб (вебер – одиниця магнітного потоку в СІ).



### Розв'язання

Нехай  $x$  – відстань від центра ваги пластини до його рівноважного положення. Тоді д.р. руху буде таким:

$$m\ddot{x} = P - R - F,$$

$$m\ddot{x} = P - k\nu\Phi^2 - c(x + \lambda_{\text{ст}}),$$

$$m\ddot{x} + k\dot{x}\Phi + cx = 0,$$

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \text{ де } k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,1} = 196 \text{ с}^{-2};$$

$$2n = \frac{k\Phi^2}{m} = \frac{0,001 \cdot 5 \cdot 100}{0,1} = 5.$$

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 5r + 196 = 0, \quad r_{1,2} = -2,5 \pm 13,78i.$$

$$x = l^{-2,5t} (A \cos 13,78t + B \sin 13,78t),$$

$$\dot{x} = l^{-2,5t} (-A \sin 13,78t + B \cos 13,78t) \cdot 13,78 - l^{-2,5t} (A \cos 13,78t + B \sin 13,78t) \cdot 2,5.$$

Використовуючи початкові умови:

$$t = 0, \quad x_0 = -\lambda_{\text{ст}} = -\frac{mg}{c} = -\frac{0,1 \cdot 9,8}{19,6} = -0,05 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = V_0 = 0, \text{ маємо: } \begin{cases} -0,05 = A \\ 0 = 13,78B - 2,5A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0,05, \\ B = -0,00907. \end{cases}$$

$$\underline{\underline{x = -l^{-2,5t} (0,05 \cos 13,78t + 0,907 \sin 13,78t) \text{ м.}}}$$

**52 (7.52).** Визначити рух пластини  $D$  при умові попередньої задачі у тому випадку, коли магнітний потік  $\Phi = 100$  Вб,  $c = 1,96$  Н/м,  $m = 0,1$  кг,  $k = 0,001$ .

Диференціальне рівняння затухаючих коливань пластини (див. 51):

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

$$\text{де } k^2 = \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,1} = 196; \quad 2n = \frac{k\Phi^2}{m} = \frac{0,001 \cdot 100^2}{0,1} = 100.$$

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 100r + 196 = 0; \quad r_1 = -98; \quad r_2 = -2.$$

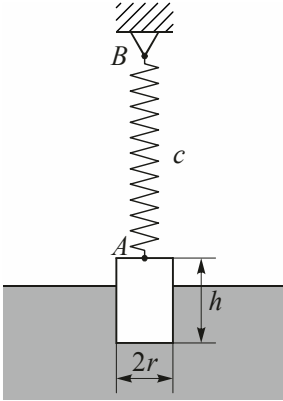
$$\text{Загальний розв'язок: } x = C_1 l^{-98t} + C_2 l^{-2t} \Rightarrow \dot{x} = -98C_1 l^{-98t} - 2C_2 l^{-2t}.$$

Використовуємо початкові умови:  $t = 0, \quad x_0 = -0,05 \text{ м},$

$$\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0,05 = C_1 + C_2, \\ 0 = -98C_1 - 2C_2. \end{cases} \quad C_1 = 0,001; \quad C_2 = -0,051.$$

$$\text{Отже, } \underline{\underline{x = 0,001l^{-98t} - 0,051l^{-2t}.$$

**53 (7.53).** Циліндр вагою  $P$ , радіусом  $r$  і висотою  $h$  підвішений на пружині  $AB$ , верхній кінець якої  $B$  закріплений; циліндр занурено у воду. В положенні рівноваги циліндр занурюється у воду на половину своєї висоти. У початковий момент часу циліндр був занурений у воду на  $2/3$  своєї висоти і потім без початкової швидкості прийшов у рух

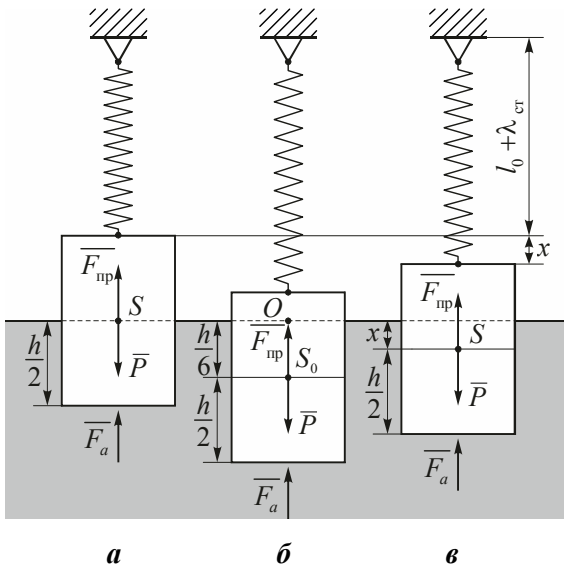


по вертикальній прямій. Вважаючи жорсткість пружини рівною  $c$  і приймаючи, що дія води зводиться до додаткової архімедової сили, визначити рух циліндра відносно положення рівноваги. Прийняти питому вагу води рівною  $\gamma$ .

### Розв'язання

$l_0$  – довжина пружини у нерозтягнутому стані,  $\lambda_{cr}$  – статичне подовження пружини. Для положення **a**:

$$P = c\lambda_{cm} + \frac{\pi r^2 h \gamma}{2}.$$



У початковий момент циліндр був занурений у воду на  $2/3$  своєї висоти і центр ваги  $S_0$  віддалений від початку координат  $O$  на відстань, що дорівнює  $h/6$  (рис. **б**).

У момент часу  $t$ , який відповідає положенню центра ваги  $S$ , визначається координатою  $x$  (рис. **в**). Диференціальне рівняння руху

$$m\ddot{x} = P - F_{нр} - F_a \text{ або}$$

$$m\ddot{x} = P - c \cdot (\lambda_{cr} + x) - \pi r^2 \left( \frac{h}{2} + x \right) \cdot \gamma \Rightarrow m\ddot{x} = \underbrace{P - c\lambda_{cr} - \frac{\pi r^2 h \gamma}{2}}_{=0} - (c + \pi r^2 \gamma) \cdot x.$$

Отже,  $\ddot{x} + \frac{c + \pi r^2 \gamma}{m} \cdot x = 0$ .

Позначаємо  $\frac{c + \pi r^2 \gamma}{p} \cdot g = k^2$ , тоді загальний розв'язок даного д.р.

такий:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

$$\dot{x} = k(-C_1 \sin kt + C_2 \cos kt).$$

Використовуємо початкові умови:

при  $t = 0$   $x_0 = \frac{h}{6}$ ,  $\dot{x} = 0$ :

$$\begin{cases} \frac{h}{6} = C_1, \\ 0 = C_2 k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{h}{6}, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Отже,  $x = \frac{h}{6} \cos kt$ .

**54 (7.54).** У попередній задачі визначити коливальний рух циліндра, якщо опір води пропорційний першому ступеню швидкості і дорівнює  $\alpha v$ .

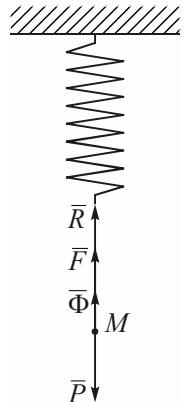
*Розв'язання*

Виштовхуюча архімедова сила  $\Phi = \gamma \pi r^2 \left( \frac{h}{2} + x \right)$ ,

де  $x$  – глибина занурення після порушення рівноваги. Для положення статичної рівноваги:

$$c \lambda_{ст} = P - \gamma \pi r^2 \frac{h}{2}.$$

При  $t = 0$   $x_0 = h \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{h}{6}$ ;  $\dot{x}_0 = 0$ .



Диференціальне рівняння руху вантажу:

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - c(x + \lambda_{\text{ст}}) - \gamma\pi r^2 \left( \frac{h}{2} + x \right) + p$$

або  $\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0$ , де  $2n = \frac{\alpha g}{P}$ .

Характеристичне рівняння:

$$r^2 + 2nr + k^2 = 0, \quad k^2 = \frac{c + \gamma\pi r^2}{P} g, \quad r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Рух буде коливальним, коли  $\left( \frac{c}{m} + \frac{\pi r^2}{m} \gamma \right) - \left( \frac{\alpha}{rm} \right)^2 > 0$ .

Тоді  $x = l^{-nt} \left( A \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right)$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -nl^{-nt} \left( A \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + B \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right) + \\ & + l^{-nt} \left( -A \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + B \cos \sqrt{k^2 - n^2} t \right). \end{aligned}$$

Використовуємо початкові умови:

$$\begin{cases} \frac{h}{6} = A, \\ 0 = -nA + B\sqrt{k^2 - n^2} \end{cases} \Rightarrow B = \frac{hn}{6\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

$$x = l^{-nt} \left( \frac{h}{6} \cos \sqrt{k^2 - n^2} t + \frac{hn}{6\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} t \right).$$

Позначимо  $\frac{h}{6} = A \sin \beta$ ,  $\frac{hn}{6\sqrt{k^2 - n^2}} = A \cos \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{k^2 - n^2}}{n}$ .

$$\text{Тоді } x = \underbrace{\frac{h}{6\sqrt{k^2 - n^2}}}_{\text{Амплітуда}} \cdot l^{-nt} \left( \sin \sqrt{k^2 - n^2} t + \beta \right).$$

**55 (7.56).** Вантаж масою  $M = 20$  кг лежить на похилій площині. Його прикріпили до нерозтягнутої пружини і надали йому початкову швидкість  $V_0 = 0,5$  м/с, напрямлену вниз. Коефіцієнт тертя ковзання  $f = 0,08$ , коефіцієнт жорсткості пружини  $c = 20$  Н/см. Кут, утворений похилою площиною з горизонтом,  $\alpha = 45^\circ$ . Визначити: 1) період коливань; 2) число максимальних відхилень від положення рівноваги, які зробить вантаж; 3) величину цих відхилень.

*Розв'язання*

1. Визначимо величину  $S$  першого розмаху. Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії можемо записати:

$$-\frac{MV_0^2}{2} = MgS \sin \alpha - MgfS \cos \alpha - \frac{cS^2}{2};$$

$$S^2 - \frac{2Mg}{c}(\sin \alpha - f \cos \alpha)S - \frac{M}{c}V_0^2 = 0;$$

$$S^2 - 0,128S - 0,0025 = 0;$$

$$S = 0,064 + \sqrt{0,004096 + 0,0025} = 0,064 + 0,0812 = 0,1452 \text{ м} = 14,52 \text{ см.}$$

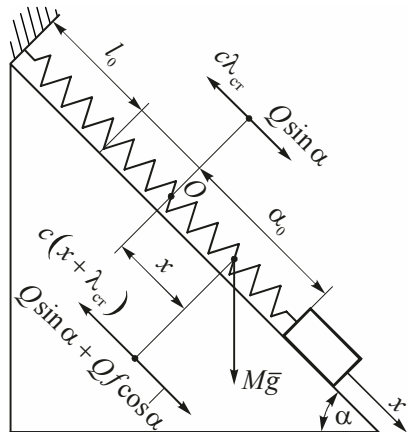
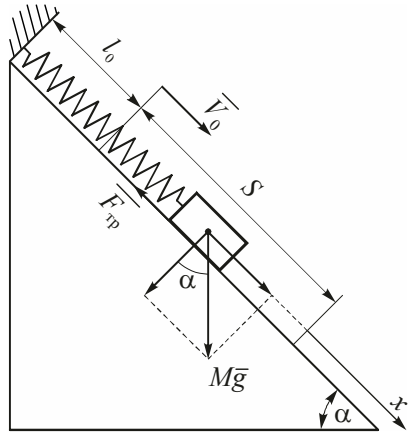
2. Якщо прийняти початок координат  $O$  в положенні, коли  $Mg \sin \alpha = c\lambda_{\text{cr}}$ , то одержимо

$$\alpha_0 = S - \lambda_{\text{cr}} = S - \frac{Mg \sin \alpha}{c} = 0,1452 - \frac{20 \cdot 9,81 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2000} = 0,0758 \text{ м} = \underline{\underline{7,58 \text{ см.}}}$$

3. Дослідимо рух вантажу при другому розмаху (при русі знизу вверх):

$$M\ddot{x} = Mgf \cos \alpha + Mg \sin \alpha - c(\lambda_{\text{cr}} + x) \text{ або } \ddot{x} + \frac{c}{M}x = gf \cos \alpha$$

$$\text{або } \ddot{x} + 100x = 0,555.$$



Це неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Відповідне йому однорідне  $\ddot{x} + 100x = 0$ . Характеристичне рівняння:  $r^2 + 100 = 0$ ,  $r_{1,2} = \pm 10i$ . Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння  $x^* = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t$ . Шукаємо частинний розв'язок у вигляді  $\bar{x} = A$ , тоді  $\dot{\bar{x}} = 0$  і  $\ddot{\bar{x}} = 0$ . З даного неоднорідного д.р. одержуємо, що  $A = 0,00555$ . Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння  $x = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t + 0,00555$ ,  $\dot{x} = -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t$ . Використовуємо початкові умови:  $t = 0 \Rightarrow x = \alpha_0$ ,  $\dot{x} = 0$ .

$$\text{Отже, } \begin{cases} \alpha_0 = C_1 + 0,00555 \\ 0 = 10C_2 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_0 - 0,00555 = 0,0758 - 0,00555 = 0,07025.$$

Закон руху:

$$x = 0,7025 \cos 10t + 0,00555 \text{ (м)}. \quad (1)$$

Швидкість вантажу дорівнює нулю при  $t = \frac{\pi}{10}$ . При цьому значенні  $t$

$$x = \alpha_1 = -0,7025 + 0,00555 = 0,0647 \text{ м} = \underline{\underline{6,47 \text{ см}}}.$$

Другий розмах дорівнює  $\alpha_0 + \alpha_1 = 7,58 + 6,47 = 14,25$  (см). Далі одержуємо:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{2Mgf \cos \alpha}{c} = 6,47 - 1,11 = \underline{\underline{5,36 \text{ (см)}}};$$

$$\alpha_3 = 5,36 - 1,11 = \underline{\underline{4,25 \text{ (см)}}};$$

$$\alpha_4 = 4,25 - 1,11 = \underline{\underline{3,14 \text{ (см)}}};$$

$$\alpha_5 = 3,14 - 1,11 = \underline{\underline{2,03 \text{ (см)}}};$$

$$\alpha_6 = 2,03 - 1,11 = \underline{\underline{0,92}} \text{ (см)};$$

$$\alpha_7 = 0,92 - 1,11 = \underline{\underline{-0,19}} \text{ (см)}.$$

Розглянемо вантаж, коли він знаходиться справа від положення точки  $O$  і  $\alpha_6 = 0,92$  см.

$$\text{Відновлювальна сила } F = c(\lambda_{\text{ст}} + \alpha_6) = 2000 \cdot (0,0707 + 0,0092) = 159,8 \text{ Н.}$$

Сила опору руху  $F_{\text{тр}} + Mg \sin \alpha = Mg(f \cos \alpha + \sin \alpha) = 20 \cdot 9,81 \times (0,08 + 1) \frac{\sqrt{2}}{2} = 149,83$  Н. Тому вантаж із даного положення перейде у рух справа наліво. Він буде рухатися згідно з законом (див.  $x = (\alpha_6 - 0,00555) \times \cos 10t + 0,00555$  (1)).

Через  $t = \frac{\pi}{10}$  с вантаж зупиниться і координата  $x$  буде такою:

$x = -\alpha_6 + 2 \cdot 0,00555 = -0,92 + 1,11 = 0,19$  (см). Отже, вантаж, не досягнувши початку координат, зупиниться, і це буде останній розмах.

Зробимо підсумки.

Довжина розмахів (см): 14,52 і 14,05;  $\alpha_1 + \alpha_2 = 11,83$ ;  $\alpha_2 + \alpha_3 = 9,61$ ;  $\alpha_3 + \alpha_4 = 7,39$ ;  $\alpha_4 + \alpha_5 = 5,71$ ;  $\alpha_5 + \alpha_6 = 2,95$ ;  $\alpha_6 + \alpha_7 = 0,73$ .

$$\text{Період коливань } T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{20}{2000}} = 0,628 \text{ с.}$$

**56 (7.60).** Під дією сили опору  $R$ , пропорційній першому ступеню швидкості ( $R = \alpha V$ ), тіло масою  $m$ , яке підвішене до пружини жорсткістю  $c$ , здійснює затухаючі коливання. Визначити, у скільки разів період затухаючих коливань  $T$  перевищує період незатухаючих коливань  $T_0$ , якщо

$$\text{відношення } \frac{n}{k} = 0,1 \left( k^2 = \frac{c}{m}, n = \frac{\alpha}{2m} \right).$$

### Розв'язання

За умовою сила опору  $R = \alpha V = \alpha \dot{x}$ . Тоді диференціальне рівняння руху приймає вигляд

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0$$

або

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\alpha}{2m}}_{2n}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{k^2}x = 0. \quad (1)$$

Характеристичне рівняння:  $r^2 + 2nr + k^2 = 0$ ,  $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}$ .

Загальний розв'язок д.р. (1):  $x = e^{-nt} \left( C_1 \cos \sqrt{n^2 - k^2}t + C_2 \sin \sqrt{n^2 - k^2}t \right)$ .

Період затухаючих коливань  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - k^2}}$ .

Період незатухаючих коливань  $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ .

$$\text{Тоді } \frac{T}{T_0} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,01}} = \frac{1}{\sqrt{0,99}} \approx 1,005.$$

Отже,  $T = 1,005T_0$ .

**57 (7.62).** Для визначення опору води рухові моделі судна при дуже малих швидкостях модель  $M$  опустили плавати в посудині, прив'язавши ніс і корму двома однаковими пружинами  $A$  і  $B$ , сили натягу яких пропорціональні подовженню. Результати спостережень показали, що відхилення моделі від положення рівноваги після кожного розмаху зменшуються,



складаючи геометричну прогресію, знаменник якої дорівнює 0,9, а тривалість кожного розмаху  $T = 0,5$  с. Визначити силу  $R_1$  опору води, що припадає на кожен кілограм

маси моделі, при її швидкості 1 м/с, припускаючи, що опір води пропорційний першому ступеню швидкості.

*Розв'язання*

Позначимо коефіцієнт пропорційності сили опору через  $\alpha$ , тоді сила опору  $R = \alpha V = \alpha \dot{x}$ . Оскільки амплітуда зменшується, коливання будуть згасаючими. Диференціальне рівняння цих коливань має вигляд:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

де  $2n = \frac{\alpha}{m}$ , звідси  $\alpha = 2nm$  ( $m$  – маса моделі).

Величину  $n$  визначимо з умови, що декремент згасаючих коливань (знаменник спадаючої геометричної прогресії)  $e^{-nT_1/2} = 0,9$  або

$-\frac{nT_1}{2} = \ln 0,9$ , де  $T_1 = 2T = 2 \cdot 0,5 = 1$  с – період коливань. Звідси

$$n = -\frac{2}{T_1} \ln 0,9 = -\frac{2}{1} \cdot (-0,1054) = 0,21 \frac{1}{\text{с}}.$$

Сила опору  $R_1$  води, що припадає на кожен кілограм маси моделі,

$$R_1 = \frac{R}{m} = \frac{\alpha \dot{x}}{1} = 2n\dot{x}.$$

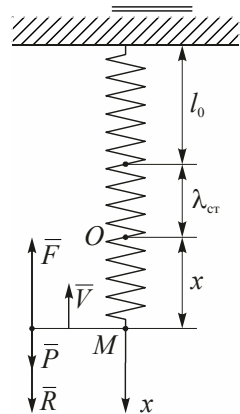
За умовою швидкість  $V = \dot{x} = 1$  м/с, звідси  $R_1 = 2 \cdot 0,21 = 0,42$  Н.

**58 (7.68).** Тіло масою 1,96 кг підвішене на пружині, яка силою у 4,9 Н розтягується на 10 см і при русі зустрічає опір, пропорційний першому ступеню швидкості і при швидкості 1 м/с рівний 19,6 Н. У початковий момент пружина розтягнута на 5 см і тіло прийшло в рух без початкової швидкості. Знайти закон цього руху.

*Розв'язання*

За другим законом Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{P} + \bar{R}.$$



(1)

Спроектуємо (1) на вісь  $Ox$ :  $m\ddot{x} = F_x + P_x + R_x$ ,  $F_x = -c(x + \lambda_{cr})$ ,  
 $P_x = P = mg$ ,  $R_x = -\alpha V = -\alpha\dot{x}$ .

Отже, маємо:  $m\ddot{x} = -cx - c\lambda_{cr} + mg - \alpha\dot{x}$  або  $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0$ .

Позначимо  $\frac{\alpha}{m} = 2n$ ,  $\frac{c}{m} = k^2$ , тоді

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (2)$$

За умовою задачі  $19,6 = \alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha = 19,6$  і  $2n = \frac{\alpha}{m} = \frac{19,6}{1,96} = 10 \text{ с}^{-1}$ ;

$4,9 = c \cdot 0,1 \Rightarrow c = 49$  і  $k^2 = \frac{49}{1,96} = 25 \text{ с}^{-2}$ . Остаточо маємо таке д.р.:

$$\ddot{x} + 10\dot{x} + 25x = 0. \quad (3)$$

Характеристичне рівняння:  $r^2 + 10r + 25 = 0$ ,  $r_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 25} = -5$ . Загальний розв'язок д.р. (3):

$$x = (C_1 + C_2t)e^{-5t}.$$

При  $t = 0$   $x_0 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м}$ ;  $V_0 = \dot{x} = 0$ . Тоді  $\dot{x} = C_2e^{-5t} - 5(C_1 + C_2t)e^{-5t}$ .

Отже,  $\begin{cases} 5 = C_1, \\ 0 = C_2 - 5C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 5, \\ C_2 = 25 \end{cases}$  і  $x = \underline{\underline{5e^{-5t}(5t + 1)}}$ .

**59 (7.69).** Вантажі масою  $m_1 = 2 \text{ кг}$  і  $m_2 = 3 \text{ кг}$  підвішені у положенні статичної рівноваги до пружини, коефіцієнт жорсткості якої  $c = 392 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ . Масляний демпфер спричиняє силу опору, пропорційну пер-

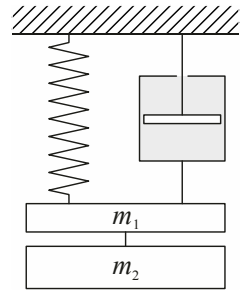
шому ступеню швидкості і рівню  $R = -\alpha V$ , де  $\alpha = 98 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ . Вантаж  $m_2$  зняли. Знайти після цього рівняння руху вантажу  $m_1$ .

*Розв'язання*

Якщо початок координат вибрати у положенні статичної рівноваги тіла масою  $m_1$ , то, як і в попередній задачі, диференціальне рівняння руху тіла

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (1)$$

де  $k^2 = \frac{c}{m_1} = \frac{392}{2} = 196 \text{ с}^{-2}$ ;  $2n = \frac{\alpha}{m_1} = \frac{98}{2} = 49 \text{ с}^{-1}$ .



Отже, рівняння (1) приймає вигляд

$$\ddot{x} + 49\dot{x} + 196x = 0.$$

Характеристичне рівняння:  $r^2 + 49r + 196 = 0$ , тоді

$$r_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{2401 - 784}}{2} = \frac{-49 \pm \sqrt{1617}}{2} = \frac{-49 \pm 40,21}{2} \Rightarrow r_1 \approx -4,4;$$

$$r_2 \approx -44,6 \Rightarrow x = C_1 e^{-4,4t} + C_2 e^{-44,6t}. \text{ Тоді } \dot{x} = -4,4C_1 e^{-4,4t} - 44,6C_2 e^{-44,6t}.$$

Використовуємо початкові умови: при  $t = 0$   $x_0 = \frac{m_2 g}{c} = \frac{3 \cdot 9,8}{392} =$

$$= 0,075 \text{ м} = 7,5 \text{ см}; \quad \dot{x} = V_0 = 0.$$

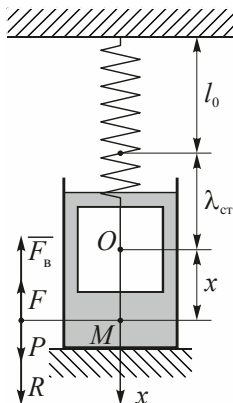
Отже, 
$$\begin{cases} 7,5 = C_1 + C_2 \\ 0 = -4,4C_1 - 44,6C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 8,32 \text{ см}, \\ C_2 = -0,82 \text{ см}. \end{cases}$$

Тоді 
$$\underline{\underline{x = 8,32e^{-4,4t} - 0,82e^{-44,6t} \text{ см.}}}$$

**60 (7.71).** Вантаж масою 100 г, підвішений до кінця пружини, рухається у рідині. Коефіцієнт жорсткості пружини  $c = 19,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ . Сила опору руху пропорційна першому ступеню швидкості вантажу:  $R = \alpha V$ , де

$\alpha = 3,5 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ . Знайти рівняння руху вантажу, якщо у початковий момент

вантаж змістили з положення рівноваги на  $x_0 = 1 \text{ см}$  і відпустили без початкової швидкості.



*Розв'язання*

За другим законом Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F}_B + \bar{F} + \bar{P} + \bar{R}, \quad (1)$$

де  $\bar{F}_B$  – виштовхуюча сила,  $\bar{F}$  – сила пружності пружини,  $\bar{P}$  – вага вантажу,  $\bar{R}$  – сила опору при русі вантажу. Проектуємо (1) на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x} = F_{Bx} + F_x + P_x + R_x,$$

де  $F_{Bx} = -F_B$ ,  $F_x = -c(x + \lambda_{\text{ст}})$ ,  $R_x = -\alpha\dot{x}$ ,  $P_x = P$ .

Враховуючи, що в положенні статичної рівноваги  $P = c\lambda_{\text{ст}} + R_B$ , маємо д.р. руху:  $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + cx$  або

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{3,5}{0,1} = 35; \quad \frac{c}{m} = \frac{19,6}{0,1} = 196.$$

$$\text{Отже, } \ddot{x} + 35\dot{x} + 196x = 0.$$

Характеристичне рівняння:  $r^2 + 35r + 196 = 0$ ,  $r_{1,2} = -17,5 \pm \sqrt{306,25 - 196} = -17,5 \pm 10,5$ ;  $r_1 = -28$ ;  $r_2 = -7$ .

Загальний розв'язок д.р. (2):

$$x = C_1 e^{-28t} + C_2 e^{-7t}.$$

При  $t = 0$   $x_0 = 0,01 \text{ м}$ ,  $V_0 = \dot{x} = 0$ . Знаходимо  $\dot{x} = -28C_1 e^{-28t} - 7C_2 e^{-7t}$ .

$$\begin{cases} 0,01 = C_1 + C_2, \\ 0 = -28C_1 - 7C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -0,0033 \text{ м} = -0,33 \text{ см}, \\ C_2 = 0,0133 \text{ м} = 1,33 \text{ см}. \end{cases}$$

Отже, розв'язок д.р., який задовольняє початкові умови,

$$\underline{\underline{x = 1,33e^{-7t} - 0,33e^{-28t} \text{ см.}}}$$

## *Рекомендована література*

1. **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст] : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – М. : Наука, 1964. – Т. 2. – 664 с.

2. **Каплунова, А. В.** Методика та приклади розв'язування задач з теоретичної механіки [Текст] / А. В. Каплунова, В. А. Михайловський, І. П. Сірош, В. І. Станкевич, А. А. Фельдман. – К. : Державне вид-во сільськогосп. літ-ри, 1961. – 390 с.

3. **Кузнецов, А. Н.** Решебник задач по теме "Дифференциальные уравнения" [Текст] / А. Н. Кузнецов. – Николаев : НУК, 2006. – 310 с.

4. **Мещерский, И. В.** Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И. В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

5. **Пономарев, К. К.** Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач [Текст] / К. К. Пономарев. – М. : ГУПИМП РСФСР, 1962. – 184 с.

6. **Яблонский, А. А.** Курс теоретической механики [Текст] : в 2 т. / А. А. Яблонский. – М. : Высшая школа, 1971. – Т. 2. – 488 с.

7. **Яблонский, А. А.** Курс теории колебаний [Текст] / А. А. Яблонский, С. С. Корейко. – М. : Высшая школа, 1966. – 256 с.

## ЗМІСТ

1. Вільні коливання .....	4
2. Вплив опору на вільні коливання .....	44
Рекомендована література .....	58