

УДК 514.18

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

О.І. ЛИТВИНЕНКО, І.О. АСТИОНЕНКО

Херсонський національний технічний університет

КОНОЇДИ ЕРМИТА-КУНСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У роботі розглядаються лінійчаті поверхні (коноїди), в яких використовуються криві Ерміта-Кунса в якості напрямних. Знайдено не поліноміальні аналоги поліномів Ерміта-Кунса третього порядку. Побудовано формули поверхонь для двох варіантів квадратних носіїв: $(0 \leq x, y \leq 1; -1 \leq x, y \leq 1)$. Когнітивно-графічний аналіз і тестування поверхонь доводить, що переважна більшість властивостей коноїда успадкована від класичної функції-«пагоди». Маючи багато спільних властивостей, ці поверхні відрізняються гауссовою кривиною. У «пагоди» кривина від'ємна, а у коноїда – нульова.

Ключові слова: коноїд Ерміта-Кунса, функція-«пагода», гармонічність функції, ймовірнісна інтерпретація полінома Ерміта-Кунса, барицентрична задача Мьобіуса, обчислювальні шаблони Ньютона-Котеса (Гаусса).

А.Н. ХОМЧЕНКО

Чорноморський національний університет імені Петра Могили

Е.И. ЛИТВИНЕНКО, И.А. АСТИОНЕНКО

Херсонский национальный технический университет

КОНОИДЫ ЭРМИТА-КУНСА И ИХ СВОЙСТВА

В работе рассмотрены линейчатые поверхности (коноиды), в которых используются кривые Эрмита-Кунса в качестве направляющих. Найденны не полиномиальные аналоги полиномов Эрмита-Кунса третьего порядка. Построены формулы поверхностей для двух вариантов квадратных носителей: $(0 \leq x, y \leq 1; -1 \leq x, y \leq 1)$. Когнитивно-графический анализ и тестирование поверхностей доказывает, что преимущественное большинство свойств коноида унаследовано от классической функции-«пагоды». Имея много общих свойств, эти поверхности отличаются гауссовой кривизной. У «пагоды» кривизна отрицательная, а у коноида – нулевая.

Ключевые слова: коноїд Эрмита-Кунса, функция-«пагода», гармоничность функции, вероятностная интерпретация полинома Эрмита-Кунса, барицентрическая задача Мёбиуса, вычислительные шаблоны Ньютона-Котеса (Гаусса).

A.N. KHOMCHENKO

Petro Mohyla Black Sea National University

O.I. LITVINENKO, I.O. ASTIONENKO

Kherson National Technical University

HERMITE-COONS' CONOIDS AND THEIR PROPERTIES

The ruled surfaces (conoids) in which the Hermite-Koons curves are used as guides are considered in this work. Non-polynomial analogues of Hermit-Koons third order polynomials are found. Surface formulas for 2 variants of square carriers are constructed: $(0 \leq x, y \leq 1, -1 \leq x, y \leq 1)$. Cognitive-graphical analysis and testing of surfaces proves that most of the conoid's properties are inherited from the classical "pagoda" function. Having many common properties, these surfaces differ by Gaussian curvature. The "pagoda" has a negative curvature, and the conoid has a zero curvature. This is the fact that became the reason of physical inadequacy of spectrums of node loads of standard higher order serendipic elements (Zienkiewicz paradox).

We construct Hermite-Koons' conoid out of third order curvature (guiding line) and piecewise linear function-“half-lid” (generatrix). Cognitive-graphical analysis and testing of received surfaces proved assumption that Hermite-Koons' conoid inherits almost all properties of the "pagoda" function. Conoid bears testing for harmony on Koebe and Privalov integral criteria. Laplace differential criterion is being executed “upon the average”. Such functions are called quasi-harmonious. They are suitable for recovery of stationary temperature field of disk with Dirichlet conditions on the boundary. All bodies created by Hermite-Koons' conoids are Simpson ones. It is interesting that body capacity does not depend on the way of calculation. The exact integration was compared to the rule of 3 cross-sections (by Simpson) as well as to Newton-Cotes and Gauss cubature. It is very convenient when exact value of volume is determined only by barycentric conoid application. In the hierarchy of finitary surfaces which appear on the basis of symmetrical pairs of functions Hermite-Koons' conoid takes interval

between classical (bilinear) "pagoda" and nonlinear "pagoda". Hermite-Koons' conoids essentially extend the model range of Simpson bodies.

Keywords: Hermite-Koons' conoid, "pagoda" function, harmoniousness of function, probability interpretation of the Hermite-Koons' polynomial, barycentric Möbius problem, Newton-Cotes (Gauss) computational templates.

Постановка проблеми

Лінійчаті поверхні (коноїди) відіграють виняткову роль у задачах відновлення функцій двох аргументів. Технологічні особливості формоутворення коноїдів давно приваблюють архітекторів і будівельників. Коноїди мають переважну більшість в базисах стандартних серендипових скінченних елементів. В цих коноїдах напрямна лінія – це графік полінома Лагранжа (коноїди Лагранжа). Цікаво побудувати коноїд на основі кривих Ерміта-Кунса в якості напрямних. Твірною, як завжди, буде пряма лінія. Такі поверхні мають нульову гауссову кривину. Саме цей факт став причиною фізичної неадекватності спектрів вузлових навантажень серендипових стандартних елементів вищих порядків (парадокс Зенкевича).

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вважається, що поліноми Ерміта з'явилися у 1864 р., хоча раніше вони зустрічаються у Лапласа (1810 р.). Спочатку кубічні поліноми Ерміта застосовували в задачах згину пружних елементів [1]. У другій половині ХХ сторіччя Кунс [2] відкрив аеродинамічні властивості кривих Ерміта третього і п'ятого порядків.

Мета дослідження

Мета роботи – побудувати коноїди Ерміта-Кунса, які утворюють базис інтерполяції на квадратному елементі з вузлами у вершинах. Показати зв'язок з білінійною інтерполяцією (функція-"пагода"). Встановити, які властивості «пагоди» [3, 4] успадковують коноїди Ерміта-Кунса.

Викладення основного матеріалу дослідження

Коноїд Ерміта-Кунса будемо конструювати із кривої третього порядку (напрямна) і кусково-лінійної функції-"напівкришки" (твірна). Спочатку розглянемо канонічний квадрат ($0 \leq x, y \leq 1$) – носій фінітної функції (рис. 1). На рис. 1 (b і c) показані графіки відповідних ліній, які шляхом прямого перемноження відновлюють поверхню коноїда.

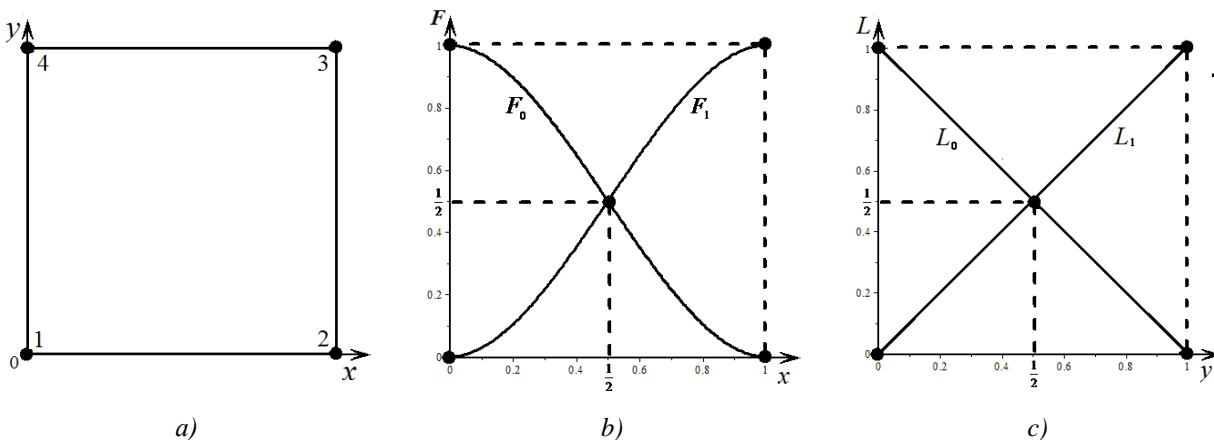


Рис. 1. Канонічний квадрат ($0 \leq x, y \leq 1$) та симетричні пари ліній: напрямні b) і твірні c)

Кубічні поліноми Кунса мають вигляд [2]:

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad F_1(x) = -2x^3 + 3x^2. \tag{1}$$

Лінійні функції-"напівкришки":

$$L_0(y) = 1 - y, \quad L_1(y) = y. \tag{2}$$

Тепер кожній вершині квадрата (рис. 1a) поставимо у відповідність поліном, який має властивості базисної функції і певною мірою узагальнює класичну "пагоду" [3, 4].

Таким чином, на одиничному квадраті рівняння коноїдів мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= (2x^3 - 3x^2 + 1)(1 - y), \\
 N_2(x, y) &= (-2x^3 + 3x^2)(1 - y), \\
 N_3(x, y) &= (-2x^3 + 3x^2) \cdot y, \\
 N_4(x, y) &= (2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot y.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Візуалізація цих коноїдів представлена на рис. 2.

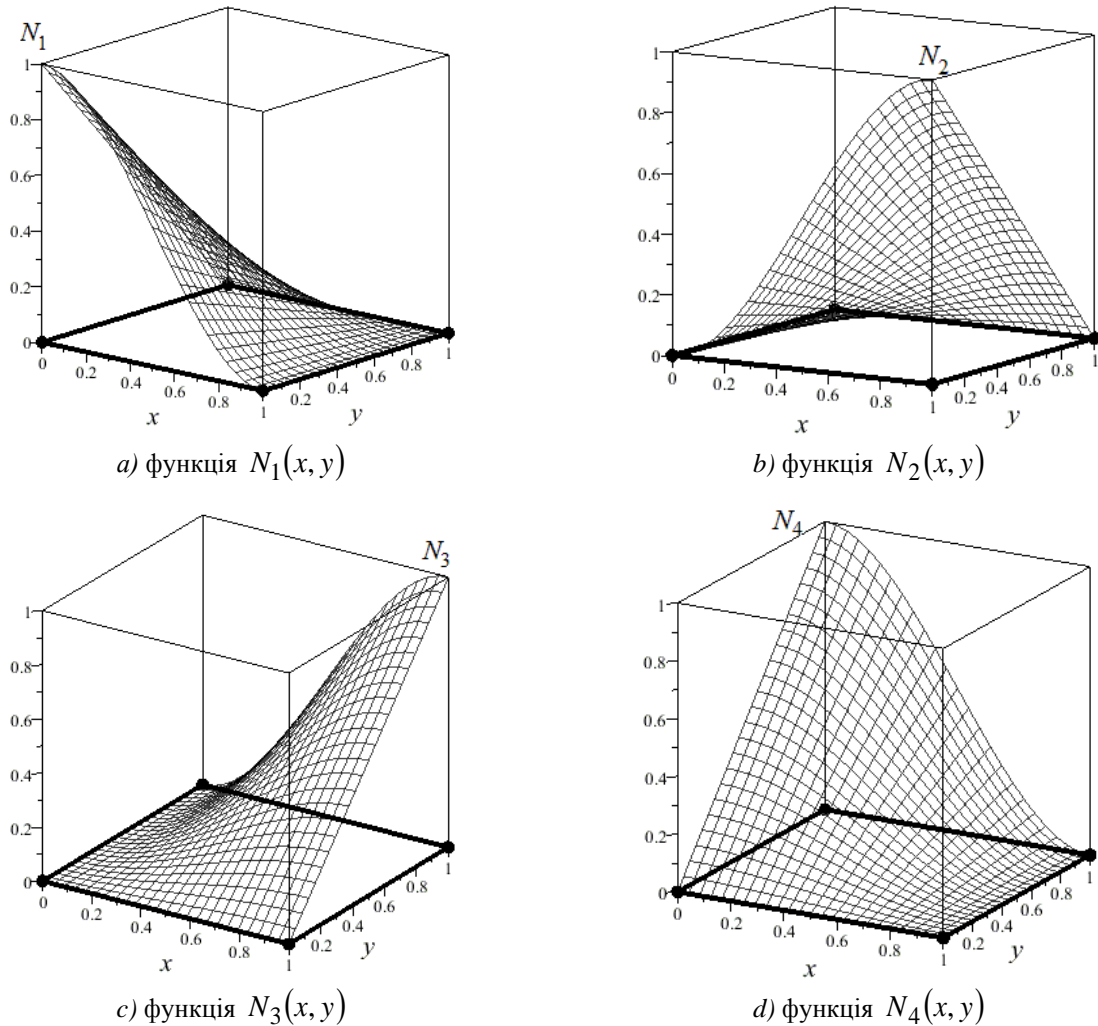


Рис. 2. Візуалізація коноїдів на канонічному квадраті ($0 \leq x, y \leq 1$)

У методі скінченних елементів у якості носія фінітних функцій часто використовують інший канонічний квадрат ($-1 \leq x, y \leq 1$).

Якщо виконати розтягування графіків (рис. 1) і паралельне перенесення центра квадрата в (0; 0), отримаємо наступний набір коноїдів:

$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \frac{1}{8}(x^3 - 3x + 2)(1 - y), \\
 N_2(x, y) &= \frac{1}{8}(-x^3 + 3x + 2)(1 - y),
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

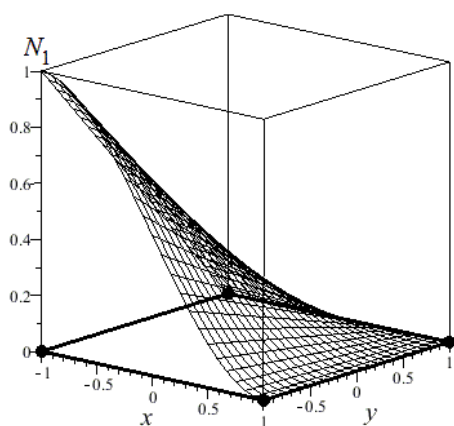
$$N_3(x, y) = \frac{1}{8}(-x^3 + 3x + 2)(1 + y),$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{8}(x^3 - 3x + 2)(1 + y).$$

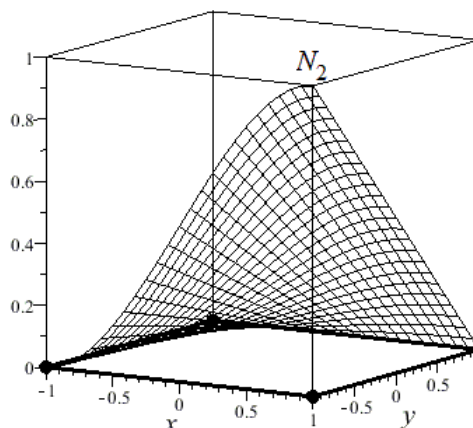
У формулах (4) роль напрямних виконують поліноми Кунса:

$$F_0(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}, \quad F_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}. \quad (5)$$

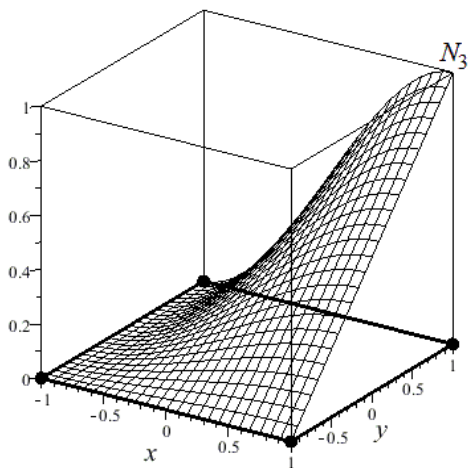
Візуалізація коноїдів на квадраті $(-1 \leq x, y \leq 1)$ представлена на рис. 3.



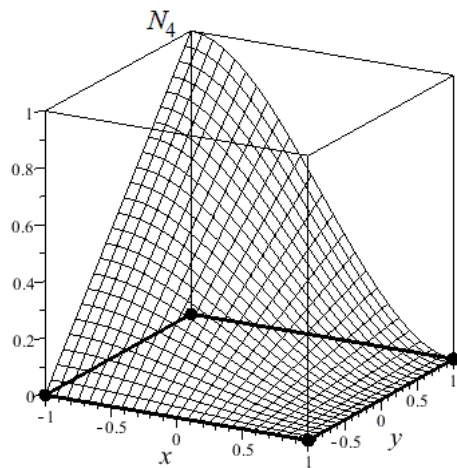
a) функція $N_1(x, y)$



b) функція $N_2(x, y)$



c) функція $N_3(x, y)$



d) функція $N_4(x, y)$

Рис. 3. Візуалізація коноїдів на канонічному квадраті $(-1 \leq x, y \leq 1)$

Варто зауважити, що існують неполіноміальні аналоги кубічних поліномів. Наприклад, замість пари (1) можна взяти наступну пару:

$$T_0(x) = \cos^2 \frac{\pi x}{2}, \quad T_1(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{2},$$

а замість пари (5):

$$T_0(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4}\right), \quad T_1(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Маючи набір напрямних і твірних ліній, можна експериментувати з коноїдами на квадратних і прямокутних носіях (рис. 4).

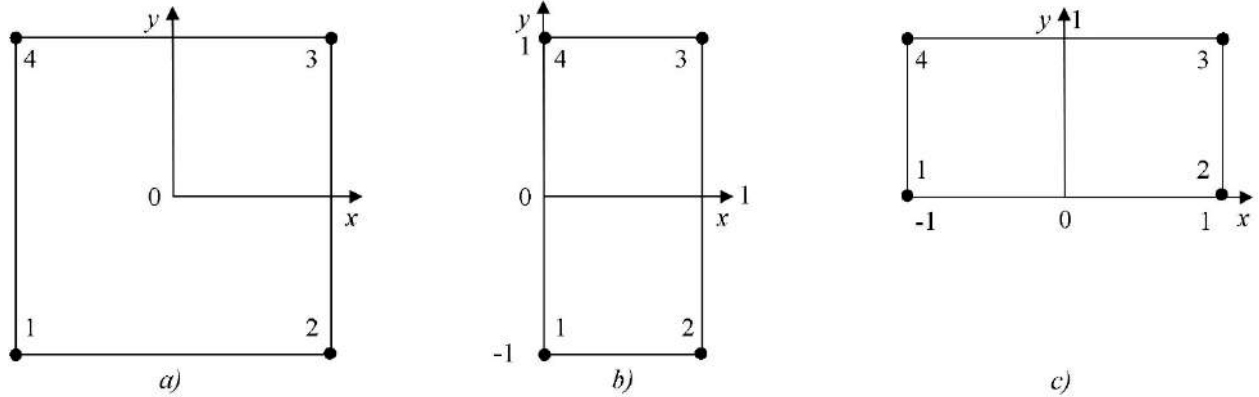


Рис. 4. Канонічний квадрат $(-1 \leq x, y \leq 1)$ а); прямокутник $(0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1)$ б); прямокутник $(-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ в)

Когнітивно-графічний аналіз (рис. 2, 3) і тестування поверхонь (3) і (4) підтвердили припущення, що коноїд Ерміта-Кунса успадковує майже усі властивості функції-«пагоди» [3, 4].

Властивість 1. Коноїд витримує тестування на гармонічність за інтегральними критеріями Кьобе (1906) і Привалова (1925). Диференціальний критерій Лапласа (1782) виконується «в середньому». Такі функції називають квазігармонічними. Вони цілком придатні для відновлення стаціонарного температурного поля пластини з умовами Діріхле на границі.

Властивість 2. Коноїд має чіткий ймовірнісний зміст:

$$0 \leq N_i(x, y) \leq 1, \quad i = \overline{1,4}; \quad \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) = 1,$$

де функція $N_i(x, y)$ – перехідна ймовірність «блукаючої» частинки із випадкового старту $M(x, y)$ у вузол i . Таким чином, ми маємо несіткову однокрокову 4-маршрутну схему метода Монте-Карло. Невипадково, що відновлення функції двох аргументів $f(x, y)$ відбувається за правилом обчислення математичного сподівання:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^4 N_i(x, y) \cdot f_i,$$

де f_i – відомі аплікати функції у кутах носія.

Властивість 3. За допомогою будь-якого із наведених базисів можна розв’язувати барицентричну задачу Мьобіуса про повузловий розподіл одиничної маси пластини із зсунутим барицентром.

Властивість 4. Усі тіла, утворені коноїдами Ермета-Кунса є сімпсоновими [6]. Цікаво, що об’єм тіла не залежить від способу обчислення. Точне інтегрування порівнювалося із правилом трьох перерізів (Сімпсона), а також з кубатурами Ньютона-Котеса і Гаусса. На рис. 5 схематично зображено обчислювальні шаблони кубатур.

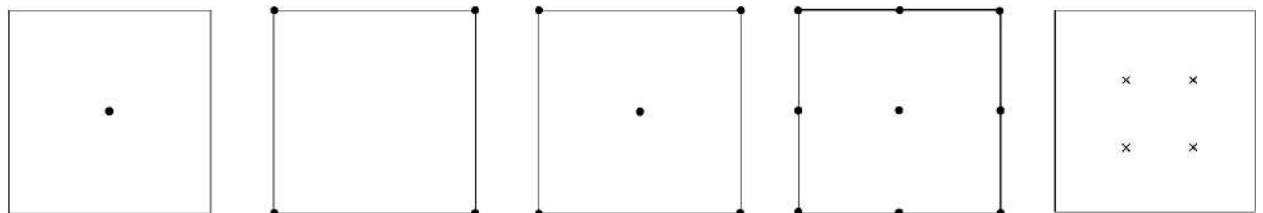


Рис. 5. Обчислювальні шаблони кубатур

Це дуже зручно, коли точне значення об'єму визначає лише барицентрична апліката коноїда.

Висновки

В ієрархії фінітних поверхонь, які утворюються на основі симетричних пар функцій, коноїд Ерміта-Кунса займає проміжок між класичною (білінійною) «пагодою» [3, 4] і нелінійною «пагодою» [5]. Коноїди Ерміта-Кунса суттєво подовжують модельний ряд сімпсонових тіл [6].

Список використаної літератури

1. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций / В.А. Постнов. – Л. : Судостроение, 1977. – 279 с.
2. Математика и САПР : В 2-х кн. Кн. 2 / П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – М. : Мир, 1989. – 264 с.
3. Хомченко А.Н. Функция «пагода»: известная и неизвестная / А.Н. Хомченко // Materials Intern. research and practice conf. «Cutting – edge science – 2015», April 30 – May 7, 2015. – Sheffield : Science and education Ltd. – С. 16–21.
4. Хомченко А.Н. П'ять способів побудови функції-«пагоди» / А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко, Н.О. Козуб // Прикл. геом. та інж. графіка. Праці. Тавр. держ. агротехнол. університету.– Вип. 4. Т. 37. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С. 24-31.
5. Хомченко А.Н. Некоторые обобщения функции-«пагоды»: компьютерный анализ когнитивно-графических свойств / А.Н. Хомченко, Е.В. Сиденко // Наукові праці: Науково-методичний журнал. – Вип. 254. Т. 266. Комп'ютерні технології. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 125–130.
6. Хомченко А. Н. Про серендипові поверхні, які утворюють сімпсонові тіла / А.Н. Хомченко, О. І. Литвиненко // Вісник ХНТУ. – Випуск 3(62), том 2. – Херсон: ХНТУ, 2017. – С. 224–227.